

В.М. Жуков

Практические занятия по математике:

теория, задания,
ответы

Соответствует Федеральному государственному
образовательному стандарту
(третьего поколения)



1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определители: основные понятия, вычисление, свойства. Миноры, алгебраические дополнения

1°. Выражение $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ называется *определителем второго порядка*. Символы a_{ij} называются *элементами определителя*, причем первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Элементы a_{11} и a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12} и a_{21} — побочную диагональ. Определитель обозначается Δ или $|A|$.

2°. Выражение $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ называется *определителем третьего порядка*. Элементы a_{11} , a_{22} , a_{33} образуют главную диагональ, а элементы a_{13} , a_{22} , a_{31} — побочную диагональ

3°. Свойства определителя:

1) определитель не изменится, если его строки заменить соответствующими столбцами, а столбцы — строками, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

- 3) при перестановке двух строк (столбцов) местами определитель меняет знак на противоположный;
- 4) определитель равен нулю, если он содержит:
- а) строку (столбец), состоящую из нулей;
 - б) одинаковые строки (столбцы);
 - в) пропорциональные строки (столбцы);
- 5) если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух соответствующих определителей.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + d & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b & a_{13} \\ a_{21} & c & a_{23} \\ a_{31} & d & a_{33} \end{vmatrix};$$

- б) определитель не изменится, если ко всем элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца), умноженные на постоянное число.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k \cdot a_{11} & a_{22} + k \cdot a_{12} & a_{23} + k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4°. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из исходного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij} .

Например:

$$\text{если } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то } M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5°. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется произведение, т. е. $(-1)^{i+j} M_{ij}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

6°. Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения (теорема о разложении).

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}.$$

7°. Вычисление определителей четвертого, пятого и более высокого порядка осуществляется путем последовательного понижения порядка определителя, используя теорему о разложении.

Задачи для решения на практическом занятии

1.1.1. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 17 & 25 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.1.2. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & 19 & -7 \\ -1 & 11 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix}.$$

1.1.3. Дан определитель $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Выписать миноры для элементов,

которые расположены в первой строке.

1.1.4. Дан определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Вычислить алгебраические дополнения для элементов, которые находятся во втором столбце.

1.1.5. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1) \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.1.6. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 7 & 0 \\ 5 & -8 & 9 & 6 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ -8 & 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задачи для домашнего задания

1.1.7. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; 6) \begin{vmatrix} 17 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.1.8. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.1.9. \text{ Дан определитель } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix}. \text{ Выписать миноры для эле-}$$

ментов, которые расположены в третьем столбце.

$$1.1.10. \text{ Дан определитель } \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Вычислить алгебраиче-}$$

ские дополнения для элементов, которые находятся во второй строке.

1. Линейная алгебра

1.1.11. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

1.1.12. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 & 6 \\ 3 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 5 & 26 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответы

1.1.1. 1) 10; 2) -14; 3) 4; 4) 0; 5) 0; 6) 0.

1.1.2. 1) 10; 2) 180; 3) 0; 4) 34.

$$1.1.3. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

1.1.4. -9; 14; -6.

1.1.5. 1) 14; 2) 14; 3) 42; 4) 0.

1.1.6. 1) -168; 2) 96; 3) 1800.

1.1.7. 1) -11; 2) -28; 3) -14; 4) 0; 5) 0; 6) 0.

1.1.8. 1) 122; 2) 63; 3) -113; 4) 60.

$$1.1.9. \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

1.1.10. 17; 14; -2.

1.1.11. 1) -3; 2) -27; 3) -18; 4) 36.

1.1.12. 1) 144; 2) -70; 3) 192.

1.2. Матрицы: определение, действия над ними, свойства. Обратная матрица

1°. Матрицей A называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов и имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A , которая имеет m строк и n столбцов, называют матрицей размера $m \times n$. Если $m \neq n$, то матрицу A называют прямоугольной, а если $m = n$, то матрицу A называют квадратной матрицей n -го порядка. Числа a_{ij} , составляющие матрицу A , называют ее элементами. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ матрицы.

2°. Квадратная матрица, у которой на главной диагонали расположены только единицы, а все остальные элементы — нули, называется единичной и обозначается E . Например, единичная матрица второго порядка имеет вид: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается O .

Например, нулевая матрица размера 2×3 имеет вид: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица, содержащая только одну строку (только один столбец), называется вектором-строкой (вектором-столбцом).

3°. Матрицы можно складывать, умножать на число, перемножать. Суммой двух матриц A и B называется матрица $C = A + B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц слагаемых (складывать можно только матрицы одного размера). Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ .

Описанные операции обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

4°. Произведением двух матриц A и B называется матрица $C = A \times B$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов, расположенных в i -ой строке матрицы A , на соответствующие элементы, находящиеся в j -м столбце матрицы B , т. е. $c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$ (умножать можно матрицы при условии, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B).

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A(BC) = (AB)C$;
2. $A(B + C) = AB + AC$;
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B + A(\alpha B)$;

Легко показать, что $AE = EA = A$, если A — квадратная матрица, а E — единичная матрица того же порядка. Переместительный закон по отношению к произведению двух матриц, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$.

5°. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A , если выполняется равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Для того чтобы квадратная матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Обратная матрица находится по формулам:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix};$$

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \Delta \neq 0, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Задачи для решения на практическом занятии

1.2.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти:

- 1) $A + B$;
- 2) $2A$;
- 3) $2A + 3B$;
- 4) $2B - A$;
- 5) AB ;
- 6) $A^2 + 3E$;
- 7) $AB - BA$.

1.2.2. Найти произведения матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 2 \ 1)$.

1.2.3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти:

- 1) $A^2 + 2B - 3E$;
- 2) $AB - BA$;
- 3) $(A - 2B)^2$;
- 4) $A^2 - B^2$;
- 5) $(A - B)(A + B)$.

1.2.4. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Задачи для домашнего задания

1.2.5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти:

1) $A - B;$

2) $-2B;$

3) $3A - 2B;$

4) $BA;$

5) $A^2 + 3A;$

6) $A(A - B);$

7) $A^2 - BA.$

1.2.6. Найти произведения матриц:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3) (1 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти:

1) $B^2 - 2A + 5E$;

2) $AB - BA$;

3) $A^2 - B^2$;

4) $(A+B)^2$;

5) $A^2 + 2AB + B^2$.

1.2.8. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}.$

Ответы

$$1.2.1. 1) \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.2. 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.3. 1) \begin{pmatrix} 9 & 7 & 16 \\ 8 & 9 & 18 \\ 14 & 13 & 17 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 15 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 10 & -11 & -4 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 14 \\ -1 & 8 & 14 \\ -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 15 \\ 14 & 11 & 15 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.4. 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1,8 & -0,4 & -0,8 \\ 0,2 & 0,4 & -0,2 \\ -2,4 & 0,2 & 1,4 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.5. 1) \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}; 4) \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 34 & 16 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}; 7) \begin{pmatrix} 31 & 13 \\ 17 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.6. 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}; 3) (14).$$

$$1.2.7. 1) \begin{pmatrix} 5 & -6 & -5 \\ -8 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 5 & -2 & -13 \\ 15 & 9 & -8 \\ -2 & -8 & -14 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \\ 11 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 21 & 16 & 4 \\ 16 & 17 & 0 \\ 20 & 16 & 5 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 26 & 14 & -9 \\ 31 & 26 & -8 \\ 18 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$1.2.8. 1) \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & -0,2 \\ -0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 6 & -3,5 & 0,5 \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -2,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

1.3. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Методы их решения (правило Крамера, метод Гаусса, матричный способ)

1°. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\text{имеет вид: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \text{ где числа } a_{ij}, i=1, 2, 3, j=1, 2, 3$$

называются коэффициентами системы, числа b_1, b_2, b_3 — свободными членами, x_1, x_2, x_3 — неизвестными системы.

1. Линейная алгебра

2°. *Решением системы* называются такие значения неизвестных, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Система уравнений называется *совместной (несовместной)*, если она имеет (не имеет) решение. Совместная система называется *определенной (неопределенной)*, если она имеет единственное решение (более одного решения). *Решить систему* — значит найти ее решение (все решения, если их множество).

3°. *Правило Крамера*. Если определитель, составленный из коэффициентов системы, отличен от нуля, то система является определенной и ее решение находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

4°. *Матричный способ*. Представим систему трех линейных

уравнений с тремя неизвестными
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 в мат-

ричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Отдел
учебной
литературы

Тогда ее решение можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к матрице A .

5°. *Метод Гаусса.* Действия над уравнениями системы называются *элементарными преобразованиями*, если система, полученная после выполнения конечного числа этих преобразований, имеет те и только те решения, что и исходная система. Элементарными преобразованиями считаются следующие действия:

- а) перестановка двух уравнений системы местами;
- б) умножение всех членов любого уравнения системы на постоянное число;
- в) умножение всех членов некоторого уравнения системы на постоянное число и сложение их с соответствующими членами любого другого уравнения системы.

Метод Гаусса состоит в последовательном выполнении двух этапов метода. На первом этапе (*прямой ход*) система с использованием элементарных преобразований приводится к треугольному (трапецидальному) виду. На втором этапе (*обратный ход*) из системы треугольного (трапецидального) вида последовательно, начиная с последнего, определяются значения неизвестных.

Метод Гаусса также применяется для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными, если: а) определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю; б) число линейных уравнений в системе не равно числу неизвестных.

6°. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, где числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются

коэффициентами системы, числа b_1, b_2 — *свободными членами*, x_1, x_2 — *неизвестными системы*. Для решения такой системы применяется школьный метод или один из описанных выше методов. В частности, правило Крамера для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Задачи для решения на практическом занятии

1.3.1. Решить системы:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 5x_2 = -9 \end{cases}$.

1.3.2. Представить системы в матричном виде:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_3 = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$.

1.3.3. Решить системы каждым из известных методов решения (правило Крамера, матричный способ, метод Гаусса):

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$.

1.3.4. Решить системы, если они являются совместными:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases} .$$

Задачи для домашнего задания

1.3.5. Решить системы:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_1 + 5x_2 = 13 \end{cases} ; 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} ; 3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases} .$$

1.3.6. Представить системы в матричном виде:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases} ;$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 = 17 \\ 3x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases} .$$

1.3.7. Решить системы каждым из известных методов решения (правило Крамера, матричный способ, метод Гаусса):

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases} ; 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases} ;$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} .$$

1.3.8. Решить системы, если они являются совместными:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} ; 2) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases} ;$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Ответы

1.3.1. 1) (1; 2); 2) (3; -1); 3) (2; -3).

$$1.3.2. 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.3.3. 1) (2; 3; 1); 2) (2; -1; 3); 3) (28; -14; -5).

1.3.4. 1) Нет решения; 2) $(2+2t; 1+2t; t)$, $t \in R$;

3) $(2; 2+t; t; t)$, $t \in R$.

1.3.5. 1) (3; 2); 2) (-1; 3); 3) (2; -3).

$$1.3.6. 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1.3.7. 2) (2; 2; -1); 2) (1; -2; 0); 3) (3; -4; 1).

1.3.8. 1) $(3t; -2t; t)$, $t \in R$; 2) нет решения;

3) $(1+t; -1+2t; t; -t)$, $t \in R$.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы: основные понятия.

Разложение вектора по базису

1°. *Вектором* называется направленный отрезок $\overline{AB}$, в котором точка A рассматривается как *начало*, а точка B — как *конец*. Длина вектора называется его *модулем* и обозначается $|\overline{AB}|$. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются *компланарными*. Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным* (обозначается $\vec{e}$). Два вектора называются равными, если:

- а) равны их модули;
- б) они *коллинеарны*;
- в) они *сонаправлены*.

Любые два неколлинеарных вектора плоскости образуют *базис плоскости*; любые три некопланарных вектора пространства образуют *базис пространства*.

2°. *Проекцией точки M на ось l* называется основание M_1 перпендикуляра MM_1 , опущенного из точки на ось. Если дан вектор $\overline{AB}$, а точки A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала вектора $\overline{AB}$ и его конца, то *проекцией вектора $\overline{AB}$* называется величина отрезка A_1B_1 . Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается $pr_l \overline{AB}$ и находится по формуле $pr_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$, φ — угол между вектором $\overline{AB}$ и осью l .

3°. Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единичные векторы (*орты*) соответствующих координатных осей Ox , Oy , Oz . Орты взаимно перпендикулярны, поэтому образуют в пространстве базис, который называется *декартовым ортогональным*. Любой вектор a

2. Векторная алгебра

пространства можно представить в виде $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, где $a_x = \text{pr}_{Ox} \vec{a}$, $a_y = \text{pr}_{Oy} \vec{a}$, $a_z = \text{pr}_{Oz} \vec{a}$. Эта формула называется разложением вектора в декартовом ортогональном базисе, а числа a_x, a_y, a_z называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в этом базисе, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси. Равенство $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ часто пишется в виде $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

4°. Пусть вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ . Тогда модуль этого вектора равен, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, а косинусы углов α, β, γ определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ и удовлетворяют равенству $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

5°. Пусть $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда справедливы равенства: $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}$, $\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарными ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ или } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda, \text{ где } \lambda \text{ — некоторое число. Если}$$

$\vec{a} = \overline{AB}$ и известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ находятся как разности соответствующих координат его конца и начала: $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Задачи для решения на практическом занятии

2.1.1. Даны точки $A(0; 1; 2)$ и $B(-4; 5; 0)$. Найти: 1) координаты вектора $\overline{AB}$; 2) модуль вектора $\overline{AB}$; 3) направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

2.1.2. Даны вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-1; 0; 2)$, $B(3; 1; 4)$, $C(3; 5; -1)$. Найти координаты вершины D .

2.1.3. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox и Oz углы, соответственно равные 45° и 120° . Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.

2.1.4. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2.1.5. При каких значениях γ и α векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \gamma\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ коллинеарны.

2.1.6. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$, $\vec{c} = \{7; -4\}$. Доказать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

2.1.7. В пространстве даны четыре вектора $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$, $\vec{d} = \{1; 1; -6; 5\}$. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Задачи для домашнего задания

2.1.8. Определить точку B , с которой совпадает конец вектора $\vec{AB} = \{3; -1; 4\}$, если его начало совпадает с точкой $A(1; 2; -3)$.

2.1.9. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Ox и Oz углы, соответственно равные 135° и 120° . Какой угол он составляет с осью Ox ?

2.1.10. Дано $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 30$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2.1.11. Даны точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, и установить, во сколько раз большее основание больше меньшего.

2.1.12. На плоскости даны три вектора $\vec{c} = \{9; 4\}$, $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Доказать, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{c}$ по базису векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$.

2.1.13. В пространстве даны четыре вектора $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 2; -1\}$, $\vec{d} = \{3; 7; -7\}$. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ответы

2.1.1. 1) $\{-4; 4; -2\}$; 2) 6; 3) $\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-1}{3}$.

2.1.2. $(-1; 4; -3)$.

2.1.3. $\{\sqrt{2}; \pm 1; -1\}$.

2.1.4. 24.

2.1.5. 2; -2.

2.1.6. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

2.1.7. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

2.1.8. $(4; 1; 1)$.

2.1.9. 60° или 120° .

2.1.10. 20.

2.1.11. 2.

2.1.12. $\vec{c} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

2.1.13. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

1°. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\vec{b}$, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Скалярное произведение векторов можно выразить через проекцию одного вектора на ось, сонаправленную с другим вектором:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$;

3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

4) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

5) $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$;

6) $\vec{a}\vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Применения скалярного произведения

1) угол φ между векторами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{или} \quad \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;$$

2) нахождение проекции одного вектора на направление другого:

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \text{или} \quad \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

2°. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который определяется тремя условиями:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что при наблюдении с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Свойства векторного произведения:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- 2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$;
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- 4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$,
 $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$;
- 5) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;
- 6) $\vec{a} \times \vec{b} = 0, \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

$$\text{Если } \vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} \text{ и } \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}, \text{ то } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

2. Векторная алгебра

Применения векторного произведения

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, определяется по формуле: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Аналогично

площадь треугольника определяется по формуле: $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

3°. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, которое равно векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, скалярно умноженному на вектор $\vec{c}$, т. е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Свойство смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Применения смешанного произведения

1) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, определяется по формуле: $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Аналогично объем пирамиды определяется по формуле: $V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$;

2) для компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ необходимо и достаточно, чтобы $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Задачи для решения на практическом занятии

2.2.1. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{2; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 2\}$.

Вычислить:

- 1) $\vec{a}\vec{b}$;
- 2) $\vec{a} \times \vec{b}$;
- 3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

4) $(\vec{a} + 2\vec{b})^2$;

5) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$.

2.2.2. Даны вершины треугольника ABC : $A(0; -1; 5)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(4; -1; 2)$. Вычислить:

1) внутренний угол при вершине B ;

2) внешний угол при вершине C ;

3) проекцию вектора $\vec{CB}$ на направление вектора $\vec{CA}$.

2.2.3. Даны вершины пирамиды $ABCD$: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-1; 2; 4)$. Вычислить:

1) площадь $\triangle ABC$;

2) объем пирамиды $ABCD$;

3) длину высоты DH .

2.2.4. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2x)$, $B(1; -4; 0)$, $C(-4; x; 1)$, $D(-2 - 3x; 5; 3)$. Найти значение x , при котором его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

2.2.5. Найти координаты вектора $\vec{x}$, который коллинеарен вектору $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\vec{a} = 3$.

2.2.6. Найти координаты вектора $\vec{x}$, который коллинеарен вектору $\vec{a} = \{6; -8; -7, 5\}$, образует тупой угол с осью Ox и $|\vec{x}| = 50$.

2.2.7. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$, а также удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

2.2.8. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол, а также $|\vec{x}| = 14$.

Задачи для домашнего задания

2.2.9. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 1\}$. Вычислить:

1) $\vec{a}\vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b}$;

3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

2. Векторная алгебра

4) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$;

5) $(2\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

2.2.10. Даны координаты вершин пирамиды: $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;4;4)$. Вычислить:

1) внутренний угол при вершине A в треугольнике ABC ;

2) проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{AC}$;

3) площадь треугольника ABC ;

4) длину высоты треугольника ABC , опущенной из вершины B на сторону AC ;

5) объем пирамиды $ABCD$.

2.2.11. Найти значение x , при котором четыре точки $A(2;3;0)$, $B(1;2;6)$, $C(0;3;8)$, $D(x+1;2;4)$ лежат в одной плоскости.

2.2.12. Даны три вектора: $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \{3; 2; -4\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$.

2.2.13. Даны два вектора: $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

2.2.14. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

2.2.15. Вектор $\vec{p}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\vec{a} = \{8; -15; 3\}$, образует с осью Ox острый угол. Зная, что $|\vec{p}| = 51$, найти его координаты.

2.2.16. Найти вектор $\vec{p}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{-5; 7; 0\}$ и удовлетворяет условию: $\vec{p} \cdot \{1; 2; -7\} = 10$.

Ответы

2.2.1. 1) -3 ; 2) $\{-1; 7; 5\}$; 3) -21 ; 4) 26 ; 5) $\{-2; 14; 10\}$.

2.2.2. 1) 45° ; 2) 135° ; 3) 5 .

2.2.3. 1) 14 ; 2) 14 ; 3) 3 .

2.2.4. -2 .

Практические занятия по математике: теория, задания, ответы

2.2.5 $\{1; 0,5; -0,5\}$.

2.2.6 $\{-24; 32; 30\}$.

2.2.7. $\{-3; 3; 3\}$.

2.2.8. $\{-4; -6; 12\}$.

2.2.9. 1) 3; 2) $\{5; 1; 7\}$; 3) 2; 4) $\{10; 2; 14\}$; 5) 50.

2.2.10. 1) $\arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{41}}\right)$; 2) -4; 3) 12,5; 4) 5; 5) 11.

2.2.11. 0,5.

2.2.12. $\{2; 3; -2\}$.

2.2.13. $\{2; -3; 0\}$.

2.2.14. $\{-6; -24; 8\}$.

2.2.15. $\{45; 24; 0\}$.

2.2.16. $\{7; 5; 1\}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая линия на плоскости

1°. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, имеет вид $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Вектор $\vec{s} = \{m; n\}$ называется *направляющим вектором*, а приведенное уравнение — *каноническим уравнением* прямой. Если направляющий вектор $\vec{s}$ перпендикулярен одной из координатных осей, например оси Ox , то каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}$.

Это уравнение равносильно уравнению $x = x_0$, а ноль в знаменателе указывает на то, что направляющий вектор имеет координаты $\{0; n\}$. Если обе части канонического уравнения приравнять к параметру $t \in R$, а затем выразить x и y , то получим *параметрические уравнения* прямой: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$. При использовании параметрических

уравнений считаются известными координаты фиксированной точки $M_0(x_0; y_0)$ данной прямой и ее направляющий вектор $\vec{s} = \{m; n\}$.

2°. Уравнение прямой линии, которая проходит через данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ и называется уравнением прямой, *проходящей через две точки*.

3°. Уравнение прямой, которая пересекает ось Oy в точке $P(0; b)$ и образует с осью Ox угол α , имеет вид $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется *угловым коэффициентом*, а само уравнение — *уравнением с угловым коэффициентом*. Уравнение прямой, проходящей

через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ в заданном направлении, которое определяется угловым коэффициентом k , имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Если прямая параллельна оси Oy , то ее угловой коэффициент не существует, так как $\alpha = 90^\circ$.

4°. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = \{A; B\}$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где вектор $\vec{N} = \{A; B\}$ называется *нормальным вектором* прямой. Если раскрыть скобки в этом уравнении и сделать обозначение $C = -Ax_0 - By_0$, то получим уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, которое называется *общим*.

5°. Уравнение прямой линии, которая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$, имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и называется *уравнением прямой в отрезках* (на осях Ox и Oy прямая отсекает отрезки, которые соответственно равны a и b).

6°. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, тогда угол φ между первой и второй прямыми находится по формуле: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. Если требуется вычислить острый угол

между прямыми, не учитывая того, какая из прямых является первой, а какая — второй, то используется формула: $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.

Из приведенных формул выводятся условия *параллельности* и *перпендикулярности* двух прямых.

Условие параллельности прямых l_1 и l_2 : $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 : $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

7°. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Задачи для решения на практическом занятии

3.1.1. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(4; -3)$ и параллельна:

1) вектору $\vec{s} = \{-2; 1\}$;

2) прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2}$;

3) оси Oy .

3.1.2. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом, которая проходит через точку $M_0(1; -2)$ и:

1) имеет угол наклона к оси Ox , равный 45° ;

2) параллельна прямой $y = 3x - 2$;

3) параллельна прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2}$.

3.1.3. Составить общее уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(0; -2)$ и:

1) перпендикулярна вектору $\vec{N} = \{2; -1\}$;

2) параллельна оси Oy ;

3) перпендикулярна прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2}$.

3.1.4. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1; -2)$ и $M_2(3; -1)$, и привести его к виду:

1) каноническому;

2) параметрическому;

3) общему;

4) с угловым коэффициентом;

5) в отрезках.

3.1.5. Дан треугольник ABC : $A(-3; 7)$, $B(8; 9)$, $C(3; -1)$. Найти:

1) длину стороны AC ;

2) уравнение стороны AC ;

3) уравнение высоты BH ;

4) длину высоты BH ;

5) координаты точки H ;

6) уравнение медианы BM ;

7) внутренний угол A .

3.1.6. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $2x + 3y - 17 = 0$, $2x - y - 13 = 0$ и координаты одной его вершины $A(2; -1)$. Составить уравнения двух других сторон и найти координаты точки пересечения диагоналей.

3.1.7. Найти точку Q , симметричную точке $P(-6; 4)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(-7; -5)$ и $B(3; 3)$.

3.1.8. Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(0; 3)$, $C(7; 1)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A .

3.1.9. Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

3.1.10. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$.

Задачи для домашнего задания

3.1.11. Дано каноническое уравнение прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2}$.

Найти:

- 1) направляющий вектор прямой;
- 2) координаты точки пересечения прямой с осью Ox ;
- 3) длину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy ;
- 4) угол между осью Ox и данной прямой.

3.1.12. Дано уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = -2x + 6$. Найти:

- 1) угловой коэффициент прямой;
- 2) длину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy ;
- 3) координаты точки пересечения прямой с осью Ox ;
- 4) угол между осью Ox и данной прямой.

3.1.13. Дано общее уравнение прямой $2x - 5y + 10 = 0$. Найти:

- 1) нормальный вектор прямой;
- 2) координаты точки пересечения прямой с осью Ox ;
- 3) длину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy ;
- 4) координату x_0 точки $A(x_0; 4)$, принадлежащей данной прямой.

3. Аналитическая геометрия

3.1.14. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1;3)$ и $M_2(3;-5)$, и привести его к виду:

- 1) каноническому;
- 2) параметрическому;
- 3) общему;
- 4) с угловым коэффициентом;
- 5) в отрезках.

3.1.15. Дан треугольник ABC : $A(9;10)$, $B(7;-4)$, $C(-2;8)$.

Найти:

- 1) длину стороны BC ;
- 2) уравнение стороны BC ;
- 3) уравнение высоты AH ;
- 4) длину высоты AH ;
- 5) координату точки H ;
- 6) уравнение медианы CM ;
- 7) внутренний угол B .

3.1.16. Даны уравнение стороны прямоугольника $x + 2y - 7 = 0$ и координаты двух его вершин $A(3;7)$ и $B(11;3)$. Составить уравнения трех других сторон и найти координаты точки пересечения диагоналей.

3.1.17. Найти проекцию точки $P(6;4)$ на прямую, проходящую через точки $A(-5;1)$ и $B(16;-11)$.

3.1.18. Даны вершины треугольника $A(3;2)$, $B(-4;-2)$, $C(-1;-4)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине C .

3.1.19. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1;3)$ и $C(6;2)$. Составить уравнения его сторон.

3.1.20. Даны две вершины $A(2;0)$ и $B(4;8)$ треугольника ABC и точка $H(1;3)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

Ответы

$$3.1.1. 1) \frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{1}; 2) \frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-2}; 3) \frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{1}.$$

3.1.2. 1) $y = x - 3$; 2) $y = 3x - 5$; 3) $y = \frac{-2}{3}x - \frac{4}{3}$.

3.1.3. 1) $2x - y - 2 = 0$; 2) $x = 0$; 3) $3x - 2y - 4 = 0$.

3.1.4. 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1}$; 2) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$; 3) $x - 2y - 5 = 0$;

4) $y = 0,5x - 2,5$; 5) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2,5} = 1$.

3.1.5. 1) 10; 2) $4x + 3y - 9 = 0$; 3) $3x - 4y + 12 = 0$; 4) 10; 5) (0; 3);

6) $3x - 4y + 12 = 0$; 7) $\angle A = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\angle A = \arctg 2$.

3.1.6. $2x + 3y - 1 = 0$; $2x - y - 5 = 0$; (4; 5; 0).

3.1.7. (2; -6).

3.1.8. $x - y = 0$.

3.1.9. $4x + 3y + 1 = 0$; $3x - 4y + 32 = 0$; $4x + 3y - 24 = 0$;

$3x - 4y + 7 = 0$; $x + 7y - 31 = 0$.

3.1.10. $3x - 5y - 13 = 0$; $8x - 3y + 17 = 0$; $5x + 2y - 1 = 0$.

3.1.11. 1) {1; 2}; 2) (-2; 0); 3) 4; 4) $\arctg 2$.

3.1.12. 1) -2; 2) 6; 3) (3; 0); 4) $180^\circ - \arctg 2$.

3.1.13. 1) {2; -5}; 2) (-5; 0); 3) 2; 4) 5.

3.1.14. 1) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2}$; 2) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; 3) $2x + y - 1 = 0$;

4) $y = -2x + 1$; 5) $\frac{x}{0,5} + \frac{y}{1} = 1$.

3.1.15. 1) 15; 2) $4x + 3y - 16 = 0$; 3) $3x - 4y + 13 = 0$;

4) 10; 5) (1; 4); 6) $x + 2y - 14 = 0$; 7) $\angle B = 45^\circ$.

3.1.16. $2x - y + 1 = 0$; $x + 2y - 17 = 0$; $2x - y - 19 = 0$; (6; 3).

3.1.17. (2; -3).

3.1.18. $5x + y + 9 = 0$.

3.1.19. $3x - 4y + 15 = 0$; $4x + 3y - 30 = 0$; $3x - 4y - 10 = 0$;

$4x + 3y - 5 = 0$.

3.1.20. $4x - y - 8 = 0$; $x - 3y + 20 = 0$; $3x + 5y - 6 = 0$.

3.2. Плоскость и прямая в пространстве

1°. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ называется *нормальным вектором* плоскости. Если раскрыть скобки в этом уравнении и сделать обозначение $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получим уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, которое называется *общим*.

2°. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3°. Уравнение плоскости, которая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0; 0)$, ось Oy — в точке $M_2(0; b; 0)$, а ось Oz — в точке $M_3(0; 0; c)$, имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ и называется *уравнением плоскости в отрезках* (на осях Ox , Oy и Oz плоскость отсекает отрезки, которые соответственно равны a , b и c).

4°. Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тогда угол φ между этими плоскостями находится по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если требуется вычислить острый угол между плоскостями, то берется модуль правой части формулы. Из приведенной формулы выводятся условия *параллельности* и *перпендикулярности* двух плоскостей.

$$\begin{aligned} \text{Условие параллельности плоскостей } \pi_1 \text{ и } \pi_2: \pi_1 \parallel \pi_2 &\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Условие перпендикулярности плоскостей } \pi_1 \text{ и } \pi_2: \pi_1 \perp \pi_2 &\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \end{aligned}$$

5°. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости π , заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6°. Уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$

параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{m; n; p\}$, имеют вид $\frac{x - x_0}{m} =$

$\frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Вектор $\vec{s} = \{m; n; p\}$ называется *направляющим*

вектором, а приведенные уравнения — *каноническими уравнениями* прямой. Если направляющий вектор $\vec{s}$ перпендикулярен одной из координатных осей, например оси Oy , то канонические уравне-

ния имеют вид: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$. Ноль в знаменателе ука-

зывает на то, что направляющий вектор имеет координаты $\{m; 0; p\}$.

Если все три части канонических уравнений приравнять к параметру $t \in R$, а затем выразить x , y и z , то получим *параметриче-*

ские уравнения прямой:
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$
 . При использовании парамет-

рических уравнений считаются известными координаты фиксированной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ данной прямой и ее направляющий вектор $\vec{s} = \{m; n; p\}$.

7°. Уравнения прямой линии, которая проходит через данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ и называются уравнениями прямой, *проходящей через две точки*.

8°. Прямую в пространстве можно представить как линию пересечения двух непараллельных плоскостей, которые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, поэтому

3. Аналитическая геометрия

система линейных уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ задает прямую, а ее уравнения называются *общими уравнениями прямой*.

Задачи для решения на практическом занятии

3.2.1. Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1; 2; -3)$ и перпендикулярна:

- 1) вектору $\vec{N} = \{4; -2; 1\}$;
- 2) вектору $\vec{N} = \{0; 2; -1\}$;
- 3) прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{4}$;
- 4) оси Oz .

3.2.2. Дано уравнение плоскости $2x - 3y + 4z - 12 = 0$. Найти:

- 1) нормальный вектор плоскости;
- 2) координату y_0 точки $A_0(1; y_0; -2)$, которая принадлежит данной плоскости;
- 3) координаты точки пересечения плоскости с осью Ox ;
- 4) длину отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Oz .

3.2.3. Плоскость проходит через три точки $M_1(-3; 0; 2)$, $M_2(-3; 2; 3)$, $M_3(0; 4; 1)$. Вычислить:

- 1) расстояние от точки $M_0(3; -6; 2)$ до данной плоскости;
- 2) острый угол между данной плоскостью и плоскостью $2x - y - 2z - 12 = 0$.

3.2.4. Даны две плоскости $x - 2y + 2z - 7 = 0$ и $-2x + 4y + kz + 5 = 0$. При каких значениях k эти плоскости:

- 1) параллельны;
- 2) перпендикулярны?

3.2.5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(4; 3; 1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{-3; 1; 4\}$.

3.2.6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(1; 2; 1)$ перпендикулярно двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.

3.2.7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -1; 0)$ параллельно:

1) вектору $\vec{s} = \{-3; 2; 1\}$;

2) прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{4}$;

3) оси Oy .

3.2.8. Составить уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(-2; 0; 1)$ и $M_2(1; 2; 3)$, и привести их к виду:

1) каноническому;

2) параметрическому;

3) общему.

3.2.9. Найти точку B , которая симметрична точке $A(-3; 6; -13)$ относительно плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$.

3.2.10. Вычислить расстояние от точки $M(2; 3; -1)$ до прямой

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 13 + 4t \end{cases}$$

3.2.11. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(-2; 0; 1)$ и содержит прямую $\begin{cases} 2x - 2y + z - 6 = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$.

Задачи для домашнего задания

3.2.12. Составить общее уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(4; -1; 5)$ и перпендикулярна:

1) вектору $\vec{N} = \{-3; 2; -4\}$;

2) вектору $\vec{N} = \{2; 0; -1\}$;

3) прямой $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-3}$;

4) оси Ox .

3.2.13. Дано уравнение плоскости $6x - 3y + 2z - 12 = 0$. Найти:

1) нормальный вектор плоскости;

2) координату z_0 точки $A_0(3; -2; z_0)$, которая принадлежит данной плоскости;

3) площадь треугольника, который отсекает данная плоскость от координатного угла Oxz ;

3. Аналитическая геометрия

4) объем пирамиды, ограниченной данной плоскостью и координатными плоскостями.

3.2.14. Плоскость проходит через три точки $M_1(4; 2; 0)$, $M_2(2; 1; -2)$, $M_3(2; -2; -5)$. Вычислить:

- 1) расстояние от точки $M_0(2; -3; 3)$ до данной плоскости;
- 2) острый угол между данной плоскостью и плоскостью $6x - 3y + 2z - 12 = 0$.

3.2.15. Даны две плоскости $x - py - 2z - 7 = 0$ и $2x + 2y - 4z + 5 = 0$. При каких значениях p эти плоскости:

- 1) параллельны;
- 2) перпендикулярны.

3.2.16. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2; -1; -2)$ параллельно векторам $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 1\}$.

3.2.17. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $A(1; -1; -2)$ и $B(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

3.2.18. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-5; 0; 4)$ параллельно:

- 1) вектору $\vec{s} = \{1; -2; 3\}$;
- 2) прямой $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-3}$;
- 3) оси Oz .

3.2.19. Составить уравнения прямой, которая проходит через две точки $M_1(1; 0; -2)$ и $M_2(0; -2; 3)$, и привести их к виду:

- 1) каноническому;
- 2) параметрическому;
- 3) общему.

3.2.20. Найти точку B , которая симметрична точке $A(2; -5; 7)$

относительно прямой
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

3.2.21. Вычислить расстояние от точки $M(1; -1; -2)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x - 4y - z + 6 = 0 \\ 2x - y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

3.2.22. Составить уравнение плоскости, которая содержит две параллельные прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Ответы

3.2.1. 1) $4x - 2y + z + 3 = 0$; 2) $2y - z - 7 = 0$;

3) $3x - 2y + 4z + 13 = 0$; 4) $z + 3 = 0$.

3.2.2. 1) $\{2; -3; 4\}$; 2) -6 ; 3) $(6; 0; 0)$; 4) 3.

3.2.3. 1) 6; 2) $\arccos \frac{1}{9}$.

3.2.4. 1) -4 ; 2) 5.

3.2.5. $9x - y + 7z - 40 = 0$.

3.2.6. $7x - y - 5z = 0$.

3.2.7. 1) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$; 2) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$; 3) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$.

3.2.8. 1) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$; 2) $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ 2x - 3z + 7 = 0 \end{cases}$.

3.2.9. $(5; 2; -1)$.

3.2.10. 6.

3.2.11. $5x + 4y + 7z + 3 = 0$.

3.2.12. 1) $-3x + 2y - 4z + 34 = 0$; 2) $2x - z - 3 = 0$;

3) $5x + y - 3z - 4 = 0$; 4) $x - 4 = 0$.

3.2.13. 1) $\{6; -3; 2\}$; 2) -6 ; 3) 6; 4) 8.

3.2.14. 1) 6; 2) $\arccos \frac{4}{21}$.

3.2.15. 1) -1 ; 2) 5.

3.2.16. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

3.2.17. $4x - y - 2z - 9 = 0$.

3.2.18. 1) $\frac{x+5}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{3}$; 2) $\frac{x+5}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-3}$;

3) $\frac{x+5}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-4}{1}$.

$$3.2.19. 1) \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{5}; 2) \begin{cases} x=1-t \\ y=0-2t \\ z=-2+5t \end{cases}; 3) \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 5x+z-3=0 \end{cases}$$

$$3.2.20. (4; 1; -3).$$

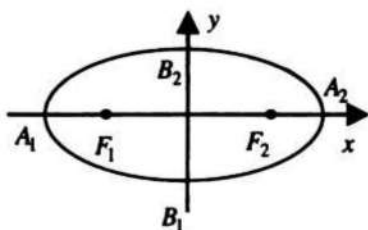
$$3.2.21. 7.$$

$$3.2.22. y+2z+1=0.$$

3.3. Кривые второго порядка

1°. **Окружность.** *Окружность* — это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*. Если r — *радиус* окружности, а точка $C(x_0; y_0)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$. Число r^{-1} называется *кривизной* окружности.

2°. **Эллипс.** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), причем эта постоянная величина больше расстояния между фокусами (это расстояние обозначают $2c$).

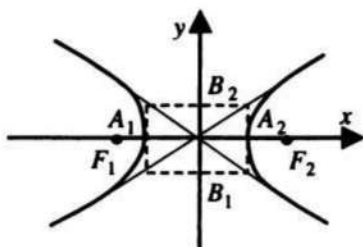


Если фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, то уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это уравнение эллипса называется *каноническим*.

Числа a и b называют соответственно большой и малой полуосями эллипса, причем $a^2 - c^2 = b^2$, отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ — соответственно большой и малой осями эллипса, а точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ — вершинами эллипса. Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Чем ближе значение ε к нулю, тем больше форма эллипса напоминает окружность; чем ближе значение к единице, тем сильнее эллипс вытянут вдоль оси Ox .

3°. **Гипербола.** Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (ее обозначают $2a$), причем эта постоянная величина меньше расстояния между фокусами (это расстояние обозначают $2c$).



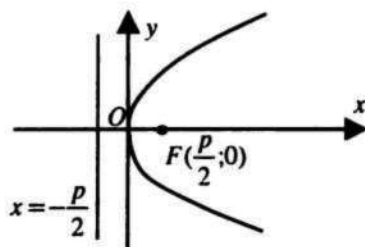
Если фокусы гиперболы находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, то уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это уравнение гиперболы называется *каноническим*.

Числа a и b называют соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы, причем $c^2 - a^2 = b^2$, отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ ($B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$) — соответственно действительной и мнимой осями гиперболы, а точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ — вершинами гиперболы. Форма гиперболы (мера ее сжатия) характеризуется ее *эксцентриситетом* $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Чем ближе значение ε к единице, тем сильнее ветви гиперболы вытянуты вдоль оси Ox . Гипербола имеет

3. Аналитическая геометрия

две асимптоты $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ (прямая называется асимптотой гиперболы, если расстояние от этой прямой до точки $M(x; y)$ гиперболы стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$).

4°. **Парабола.** *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.



Если фокусом параболы является точка $F(\frac{p}{2}; 0)$, а директрисой — прямая $x = -\frac{p}{2}$, то уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$. Это уравнение параболы называется *каноническим*, точка $O(0; 0)$ — вершиной параболы, а сама парабола расположена симметрично оси Ox .

Задачи для решения на практическом занятии

3.3.1. Составить уравнение окружности и найти ее кривизну, если:

- 1) центр ее находится в точке $O(0; 0)$, а радиус равен 4;
- 2) центр ее находится в точке $C(1; -3)$, а радиус равен 2;
- 3) центр окружности находится в точке $C(-6; 8)$, а она проходит через точку $O(0; 0)$;
- 4) центр окружности находится в точке $C(-1; 3)$, а она проходит через точку $A(3; 0)$;
- 5) точки $A(4; -3)$ и $B(-2; 1)$ находятся на концах одного диаметра.

3.3.2. Найти радиус окружности, ее центр и кривизну, если ее уравнение имеет вид:

- 1) $x^2 - 2x + y^2 = 0$;
- 2) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;
- 3) $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 15 = 0$.

3.3.3. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

- 1) его полуоси равны 5 и 3;
- 2) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 6;
- 3) расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет равен 0,6;

4) большая ось равна 30, а эксцентриситет равен 0,6;

5) точка эллипса $M_1(2\sqrt{5}; -2)$, а малая ось равна 6;

6) точки эллипса $M_1(-4; \sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; -3)$.

3.3.4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

- 1) ее оси равны 12 и 8;
- 2) мнимая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 20;
- 3) эксцентриситет равен 1,5, а расстояние между фокусами 24;
- 4) мнимая ось равна 18, а эксцентриситет равен 1,25;
- 5) расстояние между фокусами 30, а уравнение асимптот

$$y = \pm \frac{4}{3}x;$$

6) точка гиперболы $M_1(2; -2)$, а эксцентриситет равен $\sqrt{3}$;

7) точки гиперболы $M_1(6; 1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$.

3.3.5. Составить каноническое уравнение параболы, если:

- 1) расстояние между фокусом и директрисой равно 4;
- 2) фокус находится в точке $F(3; 0)$;
- 3) она проходит через точку $B(4; 6)$.

3.3.6. Составить уравнение линии на плоскости, каждая точка которой равноудалена от точки $A(4; 4)$ и от оси Ox .

3.3.7. Составить уравнение линии на плоскости, каждая точка которой находится втрое ближе к точке $A(-2; 0)$, чем к точке $B(6; 0)$.

3.3.8. Составить уравнение линии на плоскости, каждая точка которой удалена вдвое дальше от точки $A(2; 0)$, чем от прямой $x = -1$.

Задачи для домашнего задания

3.3.9. Составить уравнение окружности и найти ее кривизну, если:

- 1) центр ее находится в точке $O(0; 0)$, а радиус равен 8;
- 2) центр ее находится в точке $C(-2; 5)$, а радиус равен 4;
- 3) центр окружности находится в точке $C(-4; 3)$, а она проходит через точку $O(0; 0)$;
- 4) центр окружности находится в точке $C(2; 4)$, а она проходит через точку $A(-6; -2)$;
- 5) точки $A(-8; 3)$ и $B(4; -1)$ находятся на концах одного диаметра.

3.3.10. Найти радиус окружности, ее центр и кривизну, если ее уравнение имеет вид:

- 1) $x^2 + 10x + y^2 = 0$;
- 2) $x^2 + y^2 - 8y = 0$;
- 3) $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 15 = 0$.

3.3.11. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

- 1) его оси равны 16 и 4;
- 2) малая полуось равна 12, а расстояние между фокусами равно 10;
- 3) фокус эллипса $F_1(-4; 0)$, а эксцентриситет равен 0,8;
- 4) малая ось равна 8, а эксцентриситет равен 0,6;
- 5) точки эллипса $M_1(-3; -\sqrt{2})$ и $M_2(\sqrt{6}; 2)$;
- 6) точка эллипса $M_1(-\sqrt{15}; 1)$ и расстояние между фокусами равно 8.

3.3.12. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

- 1) ее полуоси равны 7 и 5;
- 2) действительная ось равна 8, а фокус гиперболы $F_1(6; 0)$;
- 3) эксцентриситет равен 1,25, а расстояние между фокусами 30;
- 4) мнимая полуось равна 5, а эксцентриситет равен 1,5;
- 5) расстояние между фокусами 20, а уравнение асимптот

$$y = \pm \frac{3}{4}x;$$

6) точка гиперболы $M_1(4,5;1)$, а уравнение асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;

7) точки гиперболы $M_1(4\sqrt{2};-2)$ и $M_2(-8;2\sqrt{3})$.

3.3.13. Составить каноническое уравнение параболы, если:

1) расстояние между фокусом и директрисой равно 2;

2) фокус находится в точке $F(2;0)$;

3) она проходит через точку $B(2;-\sqrt{20})$.

3.3.14. Составить уравнение линии на плоскости, каждая точка которой равноудалена от точек $A(2;4)$ и $B(3;-3)$.

3.3.15. Составить уравнение линии на плоскости, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(-4;0)$, чем к точке $B(2;0)$.

3.3.16. Составить уравнение линии на плоскости, расстояния до которой от точки $A(2;0)$ и от прямой $2x+5=0$ относятся как 4:5.

Ответы

3.3.1. 1) $x^2 + y^2 = 16$, 0,25; 2) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$, 0,5;

3) $(x+6)^2 + (y-8)^2 = 100$, 0,1;

4) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$, 0,2;

5) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 13$, $1/\sqrt{13}$.

3.3.2. 1) 1, (1;0), 1; 2) 2, (0;-2), 0,5; 3) 5, (1;-3), 0,2.

3.3.3. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

4) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; 6) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$.

3.3.4. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{75} - \frac{y^2}{25} = 1$; 3) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1$;

4) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$; 5) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$; 6) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$;

7) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

3. Аналитическая геометрия

3.3.5. 1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = 12x$; 3) $y^2 = 9x$.

3.3.6. $y = \frac{1}{8}(x-4)^2 + 2$.

3.3.7. $(x+3)^2 + y^2 = 9$.

3.3.8. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

3.3.9. 1) $x^2 + y^2 = 64$, 0,125; 2) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$, 0,25;
3) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$, 0,2;
4) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$, 0,1;
5) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 40$, $1/\sqrt{40}$.

3.3.10. 1) 5, (-5;0), 0,2; 2) 4, (0;4), 0,25; 3) 5, (1;-3), 0,2.

3.3.11. 1) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;

4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$; 6) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3.3.12. 1) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$; 3) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$;

4) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{25} = 1$; 5) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 6) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3.3.13. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = 8x$; 3) $y^2 = 10x$.

3.3.14. $x - 7y + 1 = 0$.

3.3.15. $(x-4)^2 + y^2 = 16$.

3.3.16. $\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

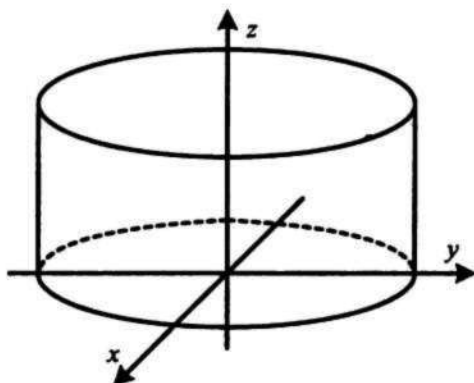
3.4. Поверхности второго порядка

1°. **Сфера.** Сфера — это множество точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*. Если r — радиус сферы, а точка $C(x_0; y_0; z_0)$ — ее центр, то уравнение сферы имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

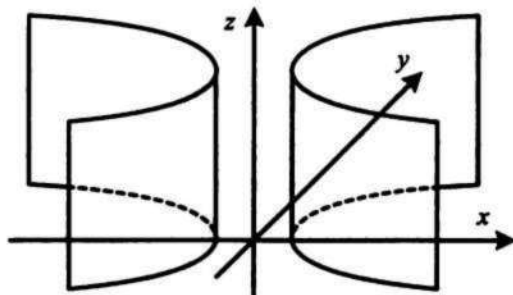
2°. **Цилиндрические поверхности.** *Цилиндрической* называется поверхность, образованная движением прямой l , называемой *образующей*, которая перемещается в пространстве параллельно какой-либо фиксированной прямой и всегда пересекает данную кривую, называемую *направляющей*.

Уравнение вида $F(x, y) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси Oz . Ниже приведены основные частные случаи цилиндрических поверхностей:

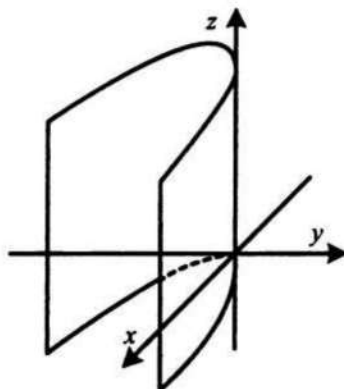
1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр;



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;



3) $y^2 = 2px$ — *параболический цилиндр*.



Аналогично уравнение вида $F(x; z) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси Oy , а уравнение вида $F(y; z) = 0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующая параллельна оси Ox .

Замечание. Для того чтобы различать уравнения цилиндрической поверхности и линии, которая является ее направляющей, условимся, что цилиндрическая поверхность задается уравнением, например $F(y; z) = 0$, а линия — системой уравнений, например

$$\begin{cases} F(y; z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

3°. Поверхности вращения. Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением линии вокруг своей оси.

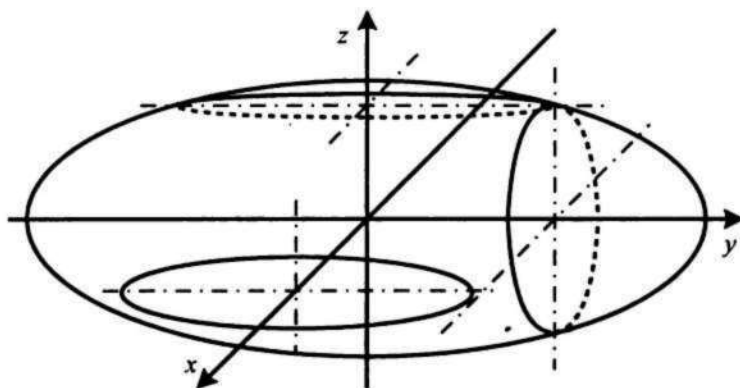
Для того чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии, лежащей в плоскости Oyz , вокруг оси Oz , нужно в

уравнении этой линии $\begin{cases} F(y; z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ заменить y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. урав-

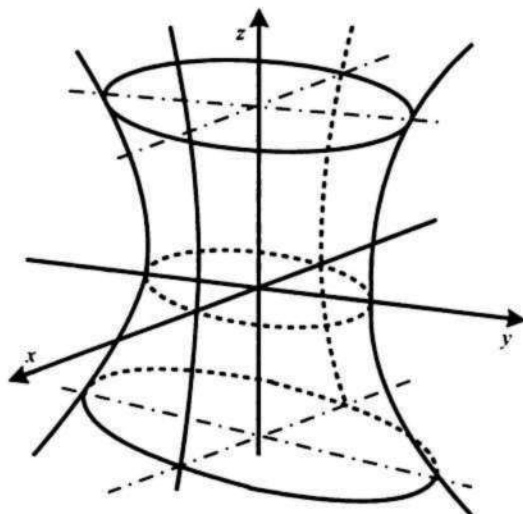
нение $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0$ задает поверхность вращения с осью вращения Oz . Аналогично уравнение $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}; y) = 0$ задает поверх-

ность вращения с осью вращения Oy , а уравнение $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ задает поверхность вращения с осью вращения Ox . Ниже приведены основные частные случаи поверхностей вращения:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид;

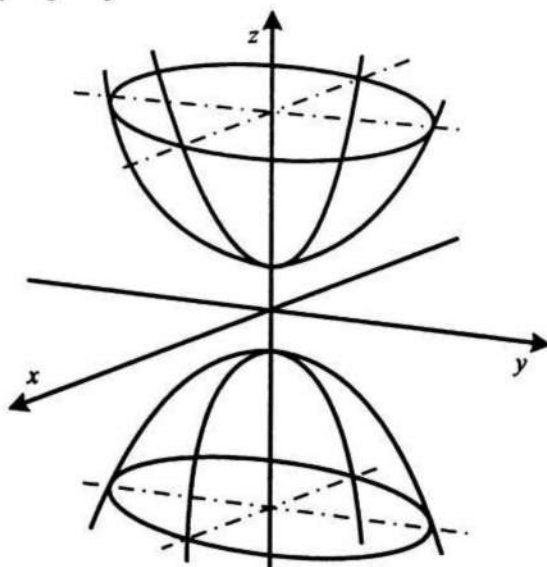


2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид;

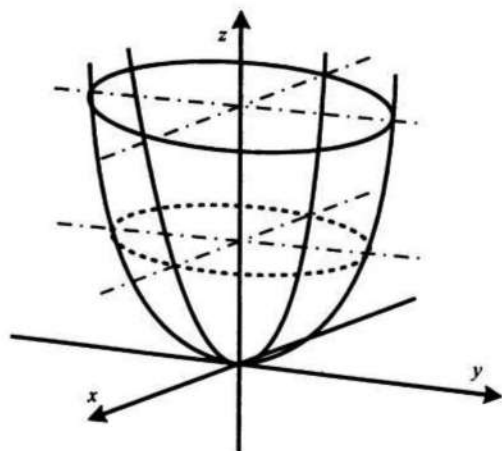


3. Аналитическая геометрия

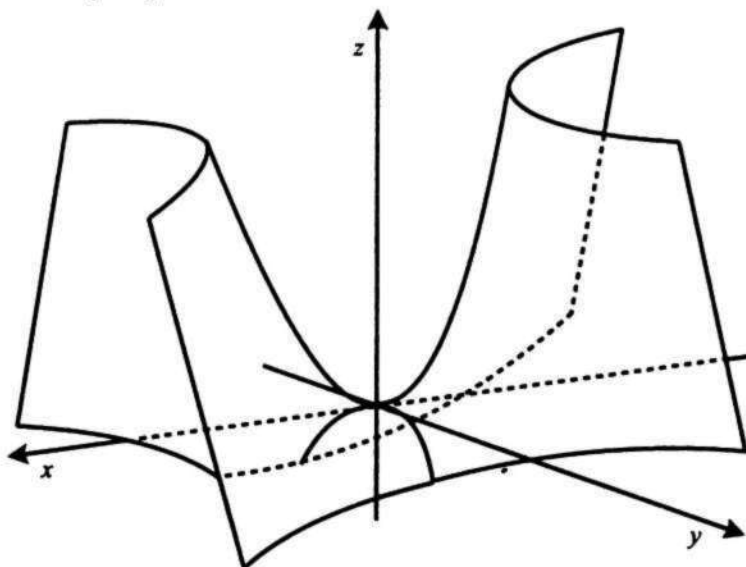
3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид;



4) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, где $p > 0, q > 0$ — эллиптический параболоид;

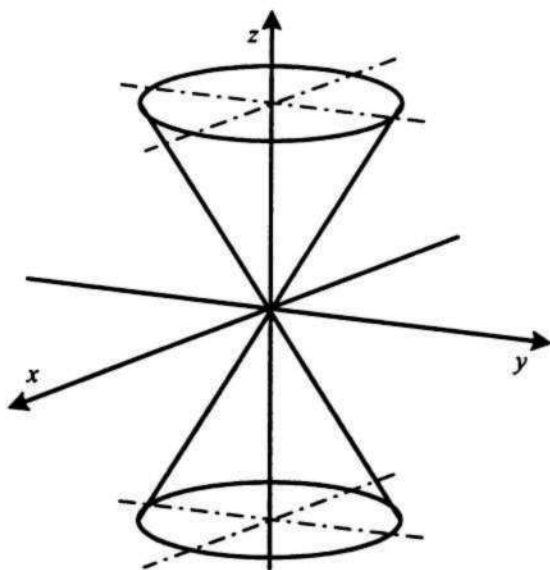


5) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ — гиперболический параболоид.



4°. **Конические поверхности.** Конической поверхностью называется поверхность, образованная вращением прямой, проходящей через данную точку, называемую *вершиной*, и скользящая по данной кривой. Движущаяся прямая называется *образующей* конуса, а кривая, по которой скользит образующая, — *направляющей*. Ниже приведен основной конус второго порядка.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — конус второго порядка.



5°. Форму и расположение поверхностей второго порядка обычно изучают методом сечений. Сущность метода сечений заключается в том, что поверхность рассекают несколькими плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Форма и параметры полученных сечений позволяют выяснить форму самой поверхности.

Задачи для решения на практическом занятии

3.4.1. Составить уравнение сферы, если:

- 1) центр ее находится в точке $O(0;0;0)$, а радиус равен $\sqrt{3}$;
- 2) центр ее находится в точке $C(4;1;-3)$, а радиус равен 2;
- 3) центр сферы находится в точке $C(-3;-6;2)$, а она проходит через точку $O(0;0;0)$;
- 4) центр сферы находится в точке $C(-1;3;7)$, а она проходит через точку $A(3;0;5)$;
- 5) точки $A(1;4;-3)$ и $B(-1;2;-1)$ находятся на концах одного диаметра.

3.4.2. Найти радиус и центр сферы:

- 1) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 36$;
- 2) $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4 = 0$;
- 3) $2x^2 + 2y^2 + 4y + 2z^2 - 3z + 2 = 0$.

3.4.3. Составить уравнение окружности, которая образуется в сечении сферы $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ координатными плоскостями:

- 1) $x = 0$;
- 2) $y = 0$;
- 3) $z = 0$.

3.4.4. Установить, какие цилиндрические поверхности задаются следующими уравнениями; определить, какой оси параллельны их образующие; сделать чертеж:

- 1) $x^2 + y^2 = 9$;
- 2) $2x^2 + 3z^2 = 6$;
- 3) $5y^2 - 3z^2 = 15$;
- 4) $y^2 = 4z$.

3.4.5. Привести уравнения поверхностей к каноническому виду, назвать их и сделать чертеж:

- 1) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 4$;
- 2) $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$;
- 3) $x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 15 = 0$;
- 4) $2x^2 + y^2 - 5z^2 = 0$.

3.4.6. Определить уравнение линии, которая образуется в сечении поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 8 = 0$ координатными плоскостями, и привести его к каноническому виду:

- 1) $x = 0$;
- 2) $y = 0$;
- 3) $z = 0$.

3.4.7. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении:

- 1) эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz ;

2) гиперболы $\begin{cases} \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy ;

3) параболы $\begin{cases} y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}$ вокруг оси Ox ;

4) прямой $\begin{cases} z = 2y \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy .

Задачи для домашнего задания

3.4.8. Составить уравнение сферы, если:

- 1) центр ее находится в точке $O(0;0;0)$, а радиус равен $\sqrt{5}$;
- 2) центр ее находится в точке $C(-2;5;0)$, а радиус равен 3;
- 3) центр сферы находится в точке $C(1;-3;4)$, а она проходит через точку $O(0;0;0)$;
- 4) центр сферы находится в точке $C(-3;0;2)$, а она проходит через точку $A(2;1;-1)$;
- 5) точки $A(0;5;2)$ и $B(2;-1;-2)$ находятся на концах одного диаметра.

3.4.9. Найти радиус и центр сферы:

- 1) $x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 49$;
- 2) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 3 = 0$;
- 3) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 7 = 0$.

3.4.10. Составить уравнение окружности, которая образуется в сечении сферы $x^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 40$ координатными плоскостями:

- 1) $x = 0$;
- 2) $y = 0$;
- 3) $z = 0$.

3.4.11. Установить, какие цилиндрические поверхности задаются следующими уравнениями; определить, какой оси параллельны их образующие; сделать чертеж:

- 1) $x^2 + z^2 = 4$;

2) $2y^2 - 3z^2 = 6$;

3) $3x^2 + 4y^2 = 12$;

4) $z^2 = 4y$.

3.4.12. Привести уравнения поверхностей к каноническому виду, назвать их и сделать чертеж:

1) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$;

2) $2x^2 - y^2 - 3z^2 = 6$;

3) $2x^2 + 4y^2 - 6z^2 - 12 = 0$;

4) $3x^2 + 2y^2 - 5z^2 = 0$.

3.4.13. Определить уравнение линии, которая образуется в сечении поверхности $2x^2 + 6y^2 - 3z^2 - 6 = 0$ координатными плоскостями, и привести его к каноническому виду:

1) $x = 0$;

2) $y = 0$;

3) $z = 0$.

3.4.14. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy ;

2) гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Ox ;

3) параболы $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz ;

4) прямой $\begin{cases} z = 3x \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Ox .

Ответы

3.4.1. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; 2) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$;

3) $(x+3)^2 + (y+6)^2 + (z-2)^2 = 49$;

4) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 29$;

5) $x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 3$.

3. Аналитическая геометрия

- 3.4.2.** 1) 6, (5;-3; 0); 2) 3, (-2;1;0); 3) 0,75, (0;-1;0,75).
- 3.4.3.** 1) $(y+2)^2 + (z-3)^2 = 24$; 2) $(x-1)^2 + (z-3)^2 = 21$;
3) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.
- 3.4.4.** 1) круговой цилиндр, Oz ; 2) эллиптический цилиндр, Oy ;
3) гиперболический цилиндр, Ox ;
3) параболический цилиндр, Ox .
- 3.4.5.** 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1$, однополостный гиперболоид;
2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2} = 1$, эллипсоид;
3) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = -1$, двуполостный гиперболоид;
4) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 0$, конус.
- 3.4.6.** 1) $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.
- 3.4.7.** 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = -1$;
3) $\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 2x$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 0$.
- 3.4.8.** 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; 2) $(x+2)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 9$;
3) $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 26$;
4) $(x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 35$;
5) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 14$.
- 3.4.9.** 1) 7, (0;2;-3); 2) 4, (3;-2;0); 3) 1,5, (0,5;-0,5;0).
- 3.4.10.** 1) $(y-4)^2 + (z+2)^2 = 40$; 2) $x^2 + (z+2)^2 = 24$;
3) $x^2 + (y-4)^2 = 36$.
- 3.4.11.** 1) круговой цилиндр, Oy ; 2) гиперболический цилиндр, Ox ;
3) эллиптический цилиндр, Oz ;
4) параболический цилиндр, Ox .
- 3.4.12.** 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 1$, эллипсоид;

$$2) \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{3} = -1, \text{ двуполостный гиперболоид;}$$

$$3) \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{2} = 1, \text{ однополостный гиперболоид;}$$

$$4) \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{15} - \frac{z^2}{6} = 0, \text{ конус.}$$

$$3.4.13. 1) \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{2} = 1; 2) \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{2} = 1; 3) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

$$3.4.14. 1) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1; 2) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{3} = 1;$$

$$3) \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} = 2z; 4) \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 0.$$

3.5. Линейные (векторные) пространства. Линейные преобразования

1°. Пусть во множестве L , состоящем из элементов $x, y, z, \dots$, для любых двух элементов $x \in L, y \in L$ определена сумма $x + y = z \in L$ и для любого элемента $x \in L$ и любого действительного числа λ определено произведение $\lambda x = u \in L$. Если сложение элементов множества L и умножение элементов этого множества на действительное число λ удовлетворяют следующим условиям:

$$1) x + y = y + x;$$

$$2) (x + y) + z = x + (y + z);$$

3) существует такой элемент $0 \in L$ (ноль — элемент), что $x + 0 = x$ для любого $x \in L$;

4) для каждого элемента $x \in L$ существует противоположный элемент $-x \in L$ такой, что $x + (-x) = 0$;

$$5) 1 \cdot x = x;$$

$$6) \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

$$7) (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$

$$8) \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$$

3. Аналитическая геометрия

то множество L называется *линейным (векторным) пространством*, а элементы $x, y, z, \dots$ этого пространства — *векторами*.

n -мерным вектором x называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i — i -тая компонента вектора x .

2°. Пусть $x, y, \dots, u$ — какие-нибудь векторы линейного пространства L . Вектор, определяемый равенством $v = \alpha x + \beta y + \dots + \gamma u$, где $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ — действительные числа, также принадлежит линейному пространству L и называется *линейной комбинацией* векторов $x, y, \dots, u$.

Пусть линейная комбинация векторов $x, y, \dots, u$ является ноль-вектором, т. е. $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma u = 0$. Векторы $x, y, \dots, u$ называются *линейно зависимыми*, если это равенство может выполняться и в том случае, если не все числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ равны нулю; векторы $x, y, \dots, u$ называются *линейно независимыми*, если это равенство может выполняться только в случае, если все числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ равны нулю.

Векторы $x, y, \dots, u$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Линейное пространство L называется n -мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые из $(n + 1)$ векторов обязательно являются линейно зависимыми. Максимальное число содержащихся в линейном пространстве линейно независимых векторов называется *размерностью* пространства; если линейное пространство L имеет размерность n , то это обозначается $\dim(L) = n$.

Совокупность n линейно независимых векторов n -мерного линейного пространства L называется его *базисом*. Каждый вектор x линейного пространства L можно представить и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса, т. е. если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют базис n -мерного линейного пространства L , то любой вектор этого пространства можно представить в виде: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Это равенство называется *разложением* вектора x по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координатами вектора x в этом базисе.

3°. В линейном пространстве L задано преобразование A , если любому вектору $x \in L$ по некоторому правилу ставится в соответствие вектор $Ax \in L$. Преобразование A называется *линейным*, если для любых двух векторов $x \in L$, $y \in L$ и любого действительного числа выполняются равенства: $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Пусть в n -мерном линейном пространстве L , базис которого образуют векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, задано линейное преобразование A . Так как $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ — векторы пространства L , то каждый из них можно единственным образом разложить по векторам базиса:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ &\dots\dots\dots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned}$$

$$\text{Матрица } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ составленная из коэффици-}$$

ентов в формулах преобразования базисных векторов, называется *матрицей линейного преобразования A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$* .

Если взять в линейном пространстве L какой-нибудь вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$, то вектор $Ax \in L$ и его можно разложить по векторам базиса $Ax = x'_1e_1 + x'_2e_2 + \dots + x'_ne_n$, причем

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Эти равенства можно назвать линейным преобразованием A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ и записать в матричном виде: $X' = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Если вектор x переводится в вектор u линейным преобразованием с матрицей A , а вектор u переводится в вектор z линейным преобразованием с матрицей B , вектор x переводится в вектор z линейным преобразованием с матрицей $C = B \cdot A$, т. е. $Z = CX$.

Задачи для решения на практическом занятии

3.5.1. Дано множество натуральных четных чисел. Арифметическими действиями (сложение, вычитание, умножение, деление), всегда выполнимыми на этом множестве, являются:

- 1) вычитание и деление;
- 2) сложение и умножение;
- 3) умножение и деление;
- 4) вычитание и сложение.

3.5.2. Имеется множество систем действительных чисел $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2)$, $(z_1; z_2)$, ... Сумма двух любых элементов определяется равенством $(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$, а произведение элемента на любое действительное число λ — равенством $\lambda(x_1; x_2) = (\lambda x_1; \lambda x_2)$. Доказать, что это множество является линейным пространством.

3.5.3. Является ли линейным пространством множество систем действительных чисел $(x_1; x_2; 0)$, $(y_1; y_2; 0)$, $(z_1; z_2; 0)$, ..., если сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 3.5.2?

3.5.4. Является ли линейным пространством множество многочленов второй степени $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$, $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$, $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2$, ...?

3.5.5. Является ли линейным пространством множество систем положительных чисел $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2)$, $(z_1; z_2)$, ..., если сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 3.5.2?

3.5.6. Даны два вектора линейного пространства $x = (1; -2)$ и $y = (3; -1)$. Найти линейную комбинацию векторов $3x - 2y$.

3.5.7. Даны два вектора-многочлена $f(t) = 2 - t + t^2$ и $g(t) = 2t - 3t^2$. Найти линейную комбинацию векторов $4f + g$.

3.5.8. Выяснить, являются ли векторы $x = (1; 2; 3)$ и $y = (2; 4; 6)$ линейно зависимыми.

3.5.9. Показать, что множество квадратных матриц второго порядка с действительными элементами является линейным четырехмерным пространством.

3.5.10. В базисе e_1, e_2, e_3 заданы векторы $x = (1; 2; 3)$, $y = (1; 1; 3)$, $z = (1; 1; 4)$. Показать, что векторы x, y, z образуют базис.

3.5.11. В четырехмерном линейном пространстве рассматривается линейное преобразование A . Найти матрицу этого преобразования, если $Ae_1 = e_3 + e_4$, $Ae_2 = e_1 + e_4$, $Ae_3 = e_2 + e_4$, $Ae_4 = e_2 + e_3$.

3.5.12. Задано линейное преобразование A , переводящее вектор x в вектор y , и линейное преобразование B , переводящее вектор y в вектор z . Найти матрицу линейного преобразования, переводящего

$$\text{вектор } x \text{ в вектор } z, \text{ если: } \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 3x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}, \begin{cases} z_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ z_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ z_3 = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}.$$

Задачи для домашнего задания

3.5.13. Дано множество целых неотрицательных чисел. Арифметическими действиями (сложение, вычитание, умножение, деление), всегда выполнимыми на этом множестве, являются:

- 1) вычитание и деление;
- 2) умножение и деление;
- 3) сложение и умножение;
- 4) вычитание и сложение.

3.5.14. Имеется множество систем действительных чисел $(x_1; x_2; x_3)$, $(y_1; y_2; y_3)$, $(z_1; z_2; z_3)$, ... Сумма двух любых элементов определяется равенством $(x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$, а произведение элемента на любое действительное число λ — равенством $\lambda(x_1; x_2; x_3) = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3)$. Доказать, что это множество является линейным пространством.

3.5.15. Является ли линейным пространством множество систем действительных чисел $(x_1; x_2; 1)$, $(y_1; y_2; 1)$, $(z_1; z_2; 1)$, ..., если сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 3.5.14?

3. Аналитическая геометрия

3.5.16. Является ли линейным пространством множество многочленов с действительными коэффициентами не выше второй степени?

3.5.17. Является ли линейным пространством множество систем отрицательных чисел $(x_1; x_2)$, $(y_1; y_2)$, $(z_1; z_2)$, ..., если сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 3.5.14?

3.5.18. Даны два вектора линейного пространства $x = (2; -3)$ и $y = (1; -2)$. Найти линейную комбинацию векторов $x - 3y$.

3.5.19. Даны два вектора-многочлена $f(t) = 3 + t - t^2$ и $g(t) = -3 - 2t + 3t^2$. Найти линейную комбинацию векторов $3f + 2g$.

3.5.20. Выяснить, являются ли векторы $x = (2; 0; 1)$ и $y = (-4; 0; -2)$ линейно зависимыми.

3.5.21. Показать, что множество прямоугольных матриц размера 2×3 , элементы которых — действительные числа, является линейным шестимерным пространством.

3.5.22. В базисе e_1, e_2, e_3 заданы векторы $x = (1; 1; -1)$, $y = (1; -1; 1)$, $z = (-1; 1; 1)$. Показать, что векторы x, y, z образуют базис.

3.5.23. В четырехмерном линейном пространстве рассматривается линейное преобразование A . Найти матрицу этого преобразования, если $Ae_1 = e_1 + e_2$, $Ae_2 = e_1 + e_3$, $Ae_3 = e_2 + e_3$, $Ae_4 = e_2 + e_4$.

3.5.24. Задано линейное преобразование A , переводящее вектор x в вектор y , и линейное преобразование B , переводящее вектор y в вектор z . Найти матрицу линейного преобразования, переводяще-

$$\text{го вектор } x \text{ в вектор } z, \text{ если: } \begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}, \begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ z_2 = y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 2y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}.$$

Ответы

3.5.1. 1) не является; 2) является; 3) не является; 4) не является.

3.5.3. Является.

3.5.4. Не является.

3.5.5. Не является.

3.5.6. $(-3; 4)$.

3.5.7. $8 - 2t + t^2$.

3.5.8. Является.

3.5.10. Образуют.

$$3.5.11. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.5.12. \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5.13. 1) не является; 2) не является; 3) является; 4) не является.

3.5.15. Не является.

3.5.16. Является.

3.5.17. Не является.

3.5.18. $(-1; 3)$.

3.5.19. $3 - t + 3t^2$.

3.5.20. Является.

3.5.21. Образуют.

$$3.5.23. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.5.24. \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.1. Абсолютная величина.

Понятие функции. Обратная, сложная и неявная функции

1°. В дальнейшем для сокращения записей будем использовать следующие простейшие символы (кванторы), которые означают:

$\forall$ — «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

$\neg$ — «не»;

$\wedge$ — «и», «одновременно»;

$\vee$ — «или»;

$\Rightarrow$ — «следует»;

$\Leftrightarrow$ — «равносильно».

2°. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Известны числовые множества:

$N = \{1; 2; 3; \dots\}$ — множество натуральных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ — множество целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{n}{m} : n \in Z, m \in N \right\}$ — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:
 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

3°. *Модулем (абсолютной величиной)* действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое следующим образом:

зом: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Отметим следующие свойства модуля:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \geq |x| - |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

Модуль разности двух чисел $|x - x_0|$ определяет расстояние между точками x и x_0 , расположенными на числовой прямой. Решением неравенства $|x - x_0| < \delta$, $\delta > 0$ будут точки интервала $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Всякий интервал, содержащий точку x_0 , называется *окрестностью* точки x_0 . В частности, интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется δ -*окрестностью* точки x_0 и обозначается $O_\delta(x_0)$.

4°. Пусть даны два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое для каждого элемента x из множества X определяет один и только один элемент y из множества Y , называется *функцией* и записывается $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех y , принадлежащих Y , называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек (x, y) плоскости xOy , координаты которых связаны уравнением $y = f(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и имеет множество значений Y . Если каждому элементу y из множества Y соответствует один и только один элемент x из множества X , то это соответствие задает функцию $x = \varphi(y)$, которая называется *обратной* для данной функции $y = f(x)$. Для функции $x = \varphi(y)$ множество Y есть область определения, а множество X — множество значений. Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ называются *взаимно обратными*.

Для нахождения обратной функции $x = \varphi(y)$ для функции $y = f(x)$ следует решить уравнение $y = f(x)$ (если это уравнение можно решить). Графики функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ совпадают. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

5°. Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве U с множеством значений Y , а переменная u является функцией $u = \varphi(x)$, которая определена на множестве X с множеством значений U . Тогда функция $y = f(\varphi(x))$, определенная на множестве X с множеством значений Y , называется *сложной функцией* от x или *функцией от функции*.

Функция $y = f(x)$, которая задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , называется *явно заданной*. Если функция

4. Введение в математический анализ

задана уравнением $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно y , то такая функция называется *неявной*.

6°. Основными элементарными функциями называются следующие функции: постоянные ($y = C$, $C = \text{const}$), степенные ($y = x^a$, $a \in R$), показательные ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$), логарифмические ($y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$), тригонометрические ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$), обратные тригонометрические ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$). Элементарными функциями называются функции, которые задаются одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз.

Задачи для решения на практическом занятии

4.1.1. Записать высказывание с помощью математических символов:

- 1) «модуль всякого действительного числа больше, чем -7 »;
- 2) «существует натуральное число, которое меньше 3 »;
- 3) «квадрат всякого рационального числа неотрицателен»;
- 4) «существует целое число, которое не больше, чем -8 ».

4.1.2. На числовой прямой задана точка x_0 . Записать интервал, который является ε -окрестностью точки x_0 , если:

- 1) $x_0 = 3,1$, $\varepsilon = 0,2$;
- 2) $x_0 = -4,3$, $\varepsilon = 0,1$;
- 3) $x_0 = -5,2$, $\varepsilon = 0,3$.

4.1.3. Дана функция $f(x) = \frac{|x+2|}{x-1}$. Найти:

- 1) $f(3)$;
- 2) $f(0)$;
- 3) $f(-2)$;
- 4) $f(-3)$;
- 5) $f(-5)$.

4.1.4. Дана функция $y = x^2 - 1$. Найти:

- 1) $f(2)$;
- 2) $f(a)$;
- 3) $f(2a)$;
- 4) $f(a + 1)$;
- 5) $f(2a - 1)$.

4.1.5. Построить графики функций:

- 1) $y = -1$;
- 2) $y = 2x - 1$;
- 3) $y = x^2 - 1$;
- 4) $y = (x - 2)^2$;
- 5) $y = x^2 + 2x - 3$.

4.1.6. Построить графики функций:

- 1) $y = |x|$;
- 2) $y = 2|x|$;
- 3) $y = |x| + 2$;
- 4) $y = |x - 2|$;
- 5) $y = |x + 1| - 3$.

4.1.7. Построить графики функций:

$$1) y = \begin{cases} -3, & \text{если } x \leq -2; \\ 2x + 1, & \text{если } -2 < x < 1; \\ x^2 + 3, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} -2x + 2, & \text{если } x < -1; \\ x^2 - 4, & \text{если } -1 \leq x \leq 3; \\ 5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

4.1.8. Построить графики функций:

- 1) $y = 2^x$;
- 2) $y = 0,5^x$;
- 3) $y = \log_2 x$;
- 4) $y = \log_{0,5} x$;
- 5) $y = \ln x$.

4.1.9. Для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию $y = \varphi(x)$ и построить графики этих взаимно обратных функций:

- 1) $y = 2x - 1$;
- 2) $y = x^2 - 1, x \geq 0$;
- 3) $y = 2^x$.

4.1.10. Даны функции $y = f(u), u = \varphi(x)$. Найти функцию $y = f(\varphi(x))$:

- 1) $y = u^2, u = \sin x$;
- 2) $y = \sin u, u = x^2$;
- 3) $y = \sqrt{u}, u = \sqrt{x}$.

4.1.11. Дана сложная функция. Представить ее в виде цепочек основных элементарных функций:

- 1) $y = \cos(\ln x)$;
- 2) $y = \ln(\cos 2x)$;
- 3) $y = \cos^3(\sqrt{x})$;
- 4) $y = \sqrt{\cos(x^3)}$.

4.1.12. неявно заданную функцию представить в явном виде:

- 1) $x + y = 4$;
- 2) $x^2 + y^2 = 4, y < 0$;
- 3) $x^3 + y^3 = 4$;
- г) $e^y = x + 1$.

Задачи для домашнего задания

4.1.13. Записать высказывание с помощью математических символов:

- 1) «существует рациональное число, которое больше, чем $\sqrt{3}$ »;
- 2) «модуль всякого целого числа больше, чем -2 »;
- 3) «существует действительное число, квадрат которого равен 7»;
- 4) «всякое натуральное число не меньше 1».

4.1.14. На числовой прямой задана точка x_0 . Записать интервал, который является ε -окрестностью точки x_0 , если:

- 1) $x_0 = 2,3, \varepsilon = 0,1$;
- 2) $x_0 = -4,2, \varepsilon = 0,3$;
- 3) $x_0 = -5,4, \varepsilon = 0,2$.

4.1.15. Дана функция $f(x) = \frac{|x+2|}{|x|-1}$. Найти:

- 1) $f(3)$;
- 2) $f(0)$;
- 3) $f(-2)$;
- 4) $f(-3)$;
- 5) $f(-5)$.

4.1.16. Дана функция $y = x^2 - 2x$. Найти:

- 1) $f(-2)$;
- 2) $f(-a)$;
- 3) $f(2a)$;
- 4) $f(a-1)$;
- 5) $f(2a+1)$.

4.1.17. Построить графики функций:

- 1) $y = 2$;
- 2) $y = 2x + 3$;
- 3) $y = x^2 + 2$;
- 4) $y = (x+2)^2$;
- 5) $y = 2x^2 - 4x - 1$.

4.1.18. Построить графики функций:

- 1) $y = -|x|$;
- 2) $y = 0,5|x|$;
- 3) $y = |x| - 1$;
- 4) $y = |x-1|$;
- 5) $y = |x-2| + 1$.

4.1.19. Построить графики функций:

$$1) y = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x \leq -1; \\ 1, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ x^2 - 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2; \\ -x^2 + 5, & \text{если } -2 \leq x < 3; \\ -4, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

4.1.20. Построить графики функций:

- 1) $y = 2^{-x} + 1$;
- 2) $y = 2^{x+1}$;
- 3) $y = \log_2(x-1)$;
- 4) $y = 2 + \log_{0.5} x$;
- 5) $y = \ln(-x)$.

4.1.21. Для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию $y = \varphi(x)$ и построить графики этих взаимно обратных функций:

- 1) $y = 2x + 3$;
- 2) $y = x^2 + 2, x < 0$;
- 3) $y = \log_2(x-1)$.

4.1.22. Даны функции $y = f(u), u = \varphi(x)$. Найти функцию $y = f(\varphi(x))$:

- 1) $y = \sqrt{u}, u = \ln x$;
- 2) $y = \operatorname{tg} u, u = 3x$;
- 3) $y = \sqrt{u}, u = x^6$.

4.1.23. Дана сложная функция. Представить ее в виде цепочек основных элементарных функций:

- 1) $y = e^{\sin x}$;
- 2) $y = \arccos \sqrt{2x}$;
- 3) $y = \ln^2(\sin^3 x)$;
- 4) $y = \sqrt{\cos(\ln(-x))}$.

4.1.24. Неявно заданную функцию представить в явном виде:

- 1) $xy = 4$;
- 2) $2^y - 2^x = 4$;
- 3) $\ln(xy) + \ln y^3 = 1$;
- 4) $\sin(x+y) = 1 - \sin x$.

Ответы

4.1.1. 1) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > -7$; 2) $\exists x \in \mathbb{N} : x < 3$; 3) $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \geq 0$;
4) $\exists x \in \mathbb{Z} : x \leq -8$.

4.1.2. 1) (2,9; 3,3); 2) (-4,4; -4,2); 3) (-5,5; -4,9).

4.1.3. 1) 2,5; 2) -2; 3) 0; 4) -0,25; 5) -0,5.

4.1.4.1) 3; 2) $a^2 - 1$; 3) $4a^2 - 1$; 4) $a^2 + 2a$; 5) $4a^2 - 4a$.

- 4.1.9. 1) $y = 0,5(x+1)$; 2) $y = +\sqrt{x+1}$; 3) $y = \log_2 x$.
- 4.1.10. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \sin(x^2)$; 3) $y = \sqrt[4]{x}$.
- 4.1.11. 1) $y = \cos u$, $u = \ln x$; 2) $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = 2x$;
3) $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos v$, $v = x^3$.
- 4.1.12. 1) $y = 4-x$; 2) $y = -\sqrt{4-x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{4-x^3}$;
4) $y = (\ln(x+1))/x$.
- 4.1.13. 1) $\exists x \in Q : x > \sqrt{3}$; 2) $\forall x \in Z, |x| > -2$;
3) $\exists x \in R : x^2 = 7$; 4) $\forall x \in N, x \geq 1$.
- 4.1.14. 1) (2,2; 2,4); 2) (-4,5; -3,9); 3) (-5,6; -5,2) .
- 4.1.15. 1) 2,5; 2) -2; 3) 0; 4) 0,5; 5) 0,75.
- 4.1.16. 1) 8; 2) $a^2 + 2a$; 3) $4a^2 - 4a$; 4) $a^2 - 4a + 3$; 5) $4a^2 - 1$.
- 4.1.21. 1) $y = 0,5(x-3)$; 2) $y = -\sqrt{x-2}$; 3) $y = 2^x + 1$.
- 4.1.22. 1) $y = \sqrt{\ln x}$; 2) $y = \operatorname{tg}(3x)$; 3) $y = |x^3|$.
- 4.1.23. 1) $y = e^u$, $u = \sin x$; 2) $y = \arccos u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 2x$;
3) $y = u^2$, $u = \ln v$, $v = t^3$, $t = \sin x$;
4) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos v$, $v = \ln t$, $t = -x$.
- 4.1.24. 1) $y = 4/x$; 2) $y = \log_2(2^x + 4)$; 3) $y = e^{0,25(1-\ln x)}$;
4) $y = -x + \arcsin(1 - \sin x)$.

4.2. Предел функции. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы. Вычисление пределов

1°. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, может быть, самой точки x_0 . Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$), если для любого положительного ε можно указать также положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

4. Введение в математический анализ

Используя математические символы, данное определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \neq x_0 (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

$$2^0. \text{ Если } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = b_1, \text{ то пишут } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = b_1$$

и называют число b_1 пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 *слева*.

$$\text{Если } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = b_2, \text{ то пишут } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = b_2 \text{ и на-}$$

зывают число b_2 пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 *справа*.

Пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева и справа называются ее *односторонними* пределами в точке x_0 .

3⁰. Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (обозначение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$), если для любого положительного ε можно указать такое положительное $N = N(\varepsilon)$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Используя математические символы, данное определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall x (|x| > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Если $x \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall x (x > N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Если $x \rightarrow -\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : \forall x (x < -N \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

4⁰. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1) если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, причем $\alpha(x) \neq 0$, то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$;

2) если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow x_0$, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$;

3) если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, то их сумма $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$;

4) если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$, а функция $f(x)$ — ограниченная, то их произведение $\alpha(x) \cdot f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$;

5) если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, то их частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

5°. Практическое вычисление пределов основывается на следующих свойствах. Если существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, то:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0.$$

Используются также замечательные пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ — первый замечательный предел;}$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, где $e = 2,71 \dots$ — второй замечательный предел.

6°. При нахождении предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ есть одновременно бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$, принято говорить, что отношение $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ при

$x \rightarrow x_0$ представляет собой *неопределенность* вида $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$.

Аналогично вводятся неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, $[1^-]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, которые встречаются при нахождении соответственно пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) - f_2(x))$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) \cdot f_2(x))$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x))^{f_2(x)}$. Отыскание предела в таких случаях называют *раскрытием неопределенности*.

7°. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ (обозначается $\alpha(x) \sim \beta(x)$). Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Ниже приведены основные эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, которые используются для раскрытия неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: $\sin x \sim x$; $\operatorname{tg} x \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $\operatorname{arctg} x \sim x$.

Задачи для решения на практическом занятии

4.2.1. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}$;

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{2x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - x^3}{(2x-1)^2}$.

4.2.2. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5}{2x - 5};$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2};$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 3x - 2};$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9};$

5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 + x^2 - 3x - 3};$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3};$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$

4.2.3. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+6} - 2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3};$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{2x^2 - 7x + 3};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}.$

4.2.4. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot \sin 2x};$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x \cdot \arctg 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\pi - x}.$$

4.2.5. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{6x+1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{4x-3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} ((2x-3) \cdot (\ln(x+2) - \ln x));$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{-2+x}{x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{-1}{x^2-4}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} (5+4x)^{\frac{-2}{x^2+x}}.$$

4.2.6. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+6}-2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 6x}{2x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{2x+3} \right)^{2x+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+2} \right)^x.$$

4.2.7. Найти односторонние пределы функции $y = \frac{8}{x^2 - 2x}$

в точке $x_0 = 0$.

4.2.8. Найти односторонние пределы функции $y = 2^{\frac{-8}{x-4}}$ в точ-

ке $x_0 = 4$.

4.2.9. Найти односторонние пределы функции $y =$

$$= \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x < 1; \\ x^2-2, & \text{если } x \geq 1 \end{cases} \text{ в точке } x_0 = 1.$$

Задачи для домашнего задания

✓ 4.2.10. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{4x+1};$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x-2x^2}{x^2-4x+4};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x^2+3};$

✓ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^3-x^3}{(2x+1)^2-x^2}.$

4.2.11. Найти пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{2x-1};$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-4x};$

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-3x-5}{1-x^2};$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4+4x+x^2}{x^3+8};$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-4}{x^3-4x};$

6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-4x-3};$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x(x-2)} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right).$

4.2.12. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{x}-2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x}-2}{2-\sqrt{2x+6}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{3-\sqrt{x^2+5}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$

4.2.13. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 4x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 6x}{\cos 4x-1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 4x}{\arcsin 5x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi-x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$$

4.2.14. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3} \right)^{-2x+1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-3x}{x} \right)^{6x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} ((1-x) \cdot (\ln(1-x) - \ln(-x)));$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1+x}{-2x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{1}{9-x^2}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x^2)^{\frac{1}{x-1}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(3+x)}{2x+4}.$$

4.2.15. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+6}+2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 6x}{4x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{2x-3} \right)^{2x+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{5x+2} \right)^x.$$

4.2.16. Найти односторонние пределы функции $y = \frac{2}{x^2+4x}$

в точке $x_0 = -4$.

4.2.17. Найти односторонние пределы функции $y = 5^{\frac{4}{2-x}}$ в точ-

ке $x_0 = 2$.

4.2.18. Найти односторонние пределы функции $y =$

$$= \begin{cases} 2, & \text{если } x < -1; \\ 2x-3, & \text{если } x \geq -1 \end{cases} \quad \text{в точке } x_0 = -1.$$

Ответы:

4.2.1. 1) 0; 2) -2; 3) ∞ ; 4) 0,75.

4.2.2. 1) 4; 2) 4; 3) 0,4; 4) ∞ ; 5) -2; 6) -0,6; 7) 1.

4.2.3. 1) -16; 2) 2,25; 3) -0,3; 4) 3.

4.2.4. 1) 3; 2) -0,5; 3) 8; 4) -4.

4.2.5. 1) e^{-6} ; 2) e^{-6} ; 3) 4; 4) e^{-4} ; 5) $\sqrt{e}$; 6) e^8 .

4.2.6. 1) 2; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0.

4.2.7. $y(0+0) = -\infty$; $y(0-0) = +\infty$.

4.2.8. $y(4+0) = 0$; $y(4-0) = +\infty$.

$$4.2.9. y(1+0) = -1; y(1-0) = 3.$$

$$4.2.10. 1) \infty; 2) -2; 3) 0; 4) -2.$$

$$4.2.11. 1) 2; 2) 1,5; 3) -3,5; 4) 0; 5) 1; 6) -9; 7) 0,5.$$

$$4.2.12. 1) -4; 2) 1,5; 3) -7,5; 4) 3.$$

$$4.2.13. 1) 2; 2) -4,5; 3) 0,8; 4) 2.$$

$$4.2.14. 1) e^{-2}; 2) e^{-6}; 3) 4; 4) e^2; 5) \sqrt[3]{e}; 6) e^{-2}; 7) 0,5.$$

$$4.2.15. 1) -4; 2) 0; 3) 0; 4) +\infty.$$

$$4.2.16. y(-4+0) = -\infty; y(-4-0) = +\infty.$$

$$4.2.17. y(2+0) = 0; y(2-0) = +\infty.$$

$$4.2.18. y(-1+0) = -5; y(-1-0) = 2.$$

4.3. Непрерывность и точки разрыва функции

1°. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки;

2) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

3) выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

В некоторых случаях используют другое определение функции непрерывной в точке.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки;

2) существуют и равны односторонние пределы: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$;

3) выполняются равенства $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка и т. д.), то она называется непрерывной в этой области.

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

2°. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $f(x)$ или являющаяся граничной точкой этой области, называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке нарушено хотя бы одно условие определения непрерывности.

Если в точке x_0 существуют односторонние пределы функции $f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва *первого рода*. Если при этом $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, то говорят, что точка x_0 — *точка скачка*; если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, а $f(x_0)$ — не существует, то говорят, что точка x_0 — *точка устранимого разрыва*.

Если в точке x_0 не существует хотя бы один односторонний предел функции $f(x)$, то точка x_0 называется точкой разрыва *второго рода*.

3°. **Пример.** Исследовать функцию $y = \frac{1}{x-2}$ на непрерывность; определить характер точек разрыва, если они существуют; построить график.

Решение. Функция определена при всех $x \neq 2$. Эта функция является элементарной, а значит, непрерывной в каждой точке своей области определения, поэтому точки $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ — точки непрерывности функции y ; точка $x = 2$ — точка разрыва. Определим характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Односторонние пределы не существуют, поэтому точка $x = 2$ — точка разрыва второго рода, а прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота графика функции y .

Для построения графика $y = \frac{1}{x-2}$ функции найдем пределы этой функции на бесконечности: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$. Эти пределы равны 0,

поэтому прямая $y = 0$ есть горизонтальная асимптота графика функции y . График функции $y = \frac{1}{x-2}$ приведен на рис. 4.3.1.

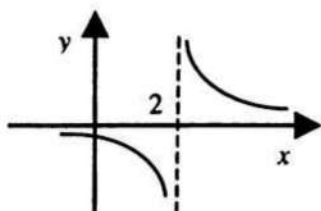


Рис. 4.3.1

4°. **Пример.** Исследовать функцию $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 2; \\ x-2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ на

непрерывность; определить характер точек разрыва, если они существуют; построить график.

Решение. Функция y определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Эта функция не является элементарной, так как она задана двумя различными аналитическими выражениями. Функция $y_1 = 1$ — элементарная, а поэтому она непрерывна при $x \in (-\infty; 2]$; функция $y_2 = x-2$ — элементарная, а поэтому она непрерывна при $x \in (2; +\infty)$. Значит, данная функция y может иметь только одну точку разрыва $x = 2$, в которой она меняет свое аналитическое выражение. Найдем односторонние пределы функции в этой точке и вычислим $y(2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2) = 0; \quad y(2) = 1.$$

Односторонние пределы существуют, но не равны, поэтому точка $x = 2$ — точка разрыва первого рода (скачок). Величина скачка функции в этой точке равна $1 - 0 = 1$.

График функции $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 2; \\ x-2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ приведен на рис. 4.3.2.

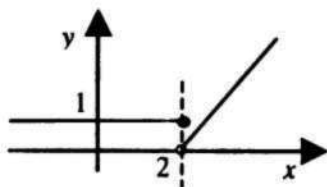


Рис. 4.3.2

Задачи для решения на практическом занятии

4.3.1. Исследовать данные функции на непрерывность; определить характер точек разрыва, если они существуют; построить график:

$$1) y = \frac{6}{x^2 - 3x}; \quad 2) y = 2^{\frac{1}{4-x^2}}; \quad 3) y = \frac{x^2 + x - 2}{x-1};$$

$$4) y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -2; \\ x^2, & \text{если } -2 < x \leq 1; \\ -2x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задачи для домашнего задания

4.3.2. Исследовать данные функции на непрерывность; определить характер точек разрыва, если они существуют; построить график:

$$1) y = \frac{-2}{x^2 + 2x}; \quad 2) y = 2^{\frac{1}{x^2 - x - 2}}; \quad 3) y = \frac{x^3 - 1}{x-1};$$

$$4) y = \begin{cases} -x + 1, & \text{если } x < -1; \\ x^2 - 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 2; \\ 3, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

5.1. Определение производной функции.

Правила дифференцирования.

Дифференцирование сложной функции

1°. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y = f(x)$ имеет несколько обозначений: y' ,

$$f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}.$$

Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в каждой точке некоторого интервала, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*.

2°. Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть *угловой коэффициент (тангенс угла наклона)* касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 , т. е. $k = f'(x_0)$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Механический смысл производной: при прямолинейном движении производная пути по времени $s'(t_0)$ есть *скорость* точки в момент времени t_0 :

$$v = s'(t_0).$$

3°. Основные правила дифференцирования.

Если C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции, тогда:

$$1. C' = 0;$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$3. (Cu)' = Cu';$$

$$4. (uv)' = u'v + uv';$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$x = x$$

Таблица производных

$$1. (x^a)' = a \cdot x^{a-1};$$

$$2. (e^x)' = e^x;$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a;$$

$$4. (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$6. (\sin x)' = \cos x;$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Производная и дифференциал функции

Правило дифференцирования сложной функции. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x , причем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Задачи для решения на практическом занятии

5.1.1. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^3 - 3x + 4e^x - 5^x$;

2) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \cos x$;

3) $y = \ln 3 \cdot \log_3 x + 2 \ln x$;

4) $y = \arcsin x - 2 \arccos x + e^5$;

5) $y = 9\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x} + \sqrt{7}$;

6) $y = \frac{5}{7}\sqrt[3]{x^7} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

5.1.2. Найти производные следующих функций:

1) $y = (\sqrt{x^3} + 1) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right)$;

2) $y = (\sqrt[3]{x} + 1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - 1)$;

3) $y = (1 + x^2) \arctg x$;

4) $y = \frac{x^4 - 2}{x^5}$;

5) $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2}$;

6) $y = \frac{1}{x^4 + 2}$;

7) $y = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{\sqrt{x} + 1}$;

8) $y = \frac{\ln x}{x^2}$.

5.1.3. Найти производные следующих функций:

1) $y = (3x - 1)^7$;

2) $y = (x^3 - 1)^5$;

3) $y = \sin 5x$;

4) $y = \cos^2 x$;

5) $y = e^{-x}$;

6) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

7) $y = \operatorname{tg} 5x$;

8) $y = \log_3(x^3 + 3)$;

9) $y = \operatorname{arccctg} 2x$.

5.1.4. Найти угол наклона (в градусах) касательной к оси Ox , проведенной к параболе $y = x^2 + 1$:

1) в начале координат;

2) в точке $A(0, 5; 1, 25)$;

3) в точке $B(-0, 5\sqrt{3}; 1, 75)$.

5.1.5. Материальная точка движется прямолинейно, причем пройденный путь определяется по закону $s(t) = 3 + t + t^2$, где путь $s(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найти скорость точки:

1) в начальный момент времени;

2) в момент времени, когда пройденный путь равен 9 метров.

Задачи для домашнего задания

5.1.6. Найти производные следующих функций:

1) $y = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$;

2) $y = \sqrt{6} \cdot 3^x 2^x - \sqrt{9^x}$;

3) $y = \ln 7 \cdot \log_7 x^5 + 2 \ln \sqrt{x^3}$;

4) $y = \operatorname{arctg} x - 2 \operatorname{arccctg} x + e^2$;

5) $y = x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 4x^2 \cdot \sqrt{x}$;

6) $y = 3\sqrt[3]{x^7} + 2\sqrt{x}$.

5. Производная и дифференциал функции

5.1.7. Найти производные следующих функций:

$$1) y = (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right);$$

$$2) y = (\sqrt[3]{x^5} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1);$$

$$3) y = (1 - x^2) \cdot \arccos x;$$

$$4) y = \frac{x^3 - 2}{x^4};$$

$$5) y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1};$$

$$6) y = \frac{x}{x^3 + 2};$$

$$7) y = \frac{e^x}{x^3};$$

$$8) y = \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

5.1.8. Найти производные следующих функций:

$$1) y = (2x + 3)^6;$$

$$2) y = (3x^2 - 5)^4;$$

$$3) y = \cos 4x;$$

$$4) y = \sqrt{\sin^3 x};$$

$$5) y = 2^{\frac{1}{x}};$$

$$6) y = -3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2};$$

$$7) y = \operatorname{ctg}^4 x;$$

$$8) y = \log_2(\operatorname{tg}^3 x);$$

$$9) y = \operatorname{arccotg} \sqrt{x}.$$

5.1.9. Найти уравнение касательной к графику функции $y = 0,25x^2$, которая образует с осью Ox угол, равный:

$$1) 45^\circ;$$

$$2) 135^\circ.$$

5.1.10. Материальная точка движется прямолинейно, причем пройденный путь определяется по закону $s(t) = 18 - 6t^2 + 2t^3$, где путь $s(t)$ измеряется в метрах, время t — в секундах. Найти момент времени после начала движения, когда скорость точки равна:

- 1) 0 м/с;
- 2) 48 м/с.

Ответы

5.1.1. 1) $3x^2 - 3 + 4e^x - 5^x \ln 5$; 2) $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \sin x$; 3) $\frac{3}{x}$;

4) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$; 6) $\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x^3}}$.

5.1.2. 1) $2 - \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 2) $1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 3) $2x \operatorname{arctg} x + 1$;

4) $\frac{10-x^4}{x^6}$; 5) $\frac{9x^2}{(x^3+2)^2}$; 6) $\frac{-4x^3}{(x^4+2)^2}$; 7) $\frac{2x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2}$;

8) $\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

5.1.3. 1) $21(3x-1)^6$; 2) $15x^2(x^3-1)^4$; 3) $5\cos 5x$; 4) $-\sin 2x$;

5) $-e^{-x}$; 6) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 7) $\frac{5}{\cos^2 5x}$; 8) $\frac{3x^2}{(x^3+3)\ln 3}$; 9) $\frac{-2}{1+4x^2}$.

5.1.4. 1) 0° ; 2) 45° ; 3) 120° .

5.1.5. 1) 1 м/с; 2) 5 м/с.

5.1.6. 1) $\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}$; 2) $6^{x+0.5} \ln 6 - 3^x \ln 3$; 3) $\frac{8}{x}$; 4) $\frac{3}{1+x^2}$;

5) $\frac{7\sqrt[3]{x^2}}{5} - 10\sqrt{x^3}$; 6) $7\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5.1.7. 1) $\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$;

$$3) -2x \arccos x - \sqrt{1-x^2}; 4) \frac{8-x^3}{x^5}; 5) \frac{1+4x-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$6) \frac{2-2x^3}{(x^3+2)^2}; 7) \frac{e^x(x-3)}{x^4}; 8) \frac{-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x^3+1})^2}.$$

$$5.1.8. 1) 12(2x+3)^5; 2) 24x(3x^2-5)^3; 3) -4 \sin 4x;$$

$$4) 1,5 \cos x \sqrt{\sin x}; 5) 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \left(\frac{-1}{x^2} \right); 6) \frac{4x}{\sqrt[3]{4-x^2}}; 7) \frac{-4 \operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x};$$

$$8) \frac{6}{\sin 2x \ln 2}; 9) \frac{-0,5}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

$$5.1.9. 1) y = x - 1; 2) y = -x - 1.$$

$$5.1.10. 1) 2c; 2) 4c.$$

5.2. Дифференцирование сложной функции. Дифференциал. Производные высших порядков (два практических занятия)

1°. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x , причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2°. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то ее приращение Δy , соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, можно представить в виде: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \rightarrow 0$. Главная часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy , линейная относительно Δx , называется дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается dy , df , $df(x)$. Таким образом, $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$, так как $\Delta x = dx$.

3°. Если производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то $(f'(x))'$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) в точке x и обозначается $f''(x)$. Таким

образом, $f''(x) = (f'(x))'$. Другие обозначения второй производной: $y'', \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$. Аналогично определяются и обозначаются производные любого другого порядка: *третьего* — $f'''(x) = (f''(x))'$, и т. д.; *n-го порядка* $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

4⁰. Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 y = d(dy)$. Аналогично определяются и обозначаются дифференциалы любого другого порядка: *третьего* — $d^3 y = d(d^2 y)$, и т. д.; *n-го порядка* $d^n y = d(d^{(n-1)} y)$. Если аргумент x является независимой переменной, то $d^2 y = f''(x)(dx)^2$; $d^3 y = f'''(x)(dx)^3$ и т. д.

Задачи для решения на практическом занятии

5.2.1. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^4;$$

$$2) y = \left(\frac{x^2-3}{x^2+1} \right)^5;$$

$$3) y = \sqrt{\frac{4x-1}{4x+1}};$$

$$4) y = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{2x-5}}.$$

5.2.2. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \frac{1}{(2x-5)^3};$$

$$2) y = \frac{1}{(x^3+1)^4};$$

$$3) y = \frac{2}{\sqrt[4]{2x-4}};$$

$$4) y = \sqrt[3]{\frac{5}{x^2-1}}.$$

5. Производная и дифференциал функции

5.2.3. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x-1}};$$

$$2) y = \frac{3x+1}{\sqrt[3]{x^2+2}};$$

$$3) y = \sqrt{\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}};$$

$$4) y = \frac{2x^2}{(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}.$$

5.2.4. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \operatorname{arctg}(x^2);$$

$$2) y = \ln \sin 2x;$$

$$3) y = \cos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$4) y = 2^{\sqrt{\log_2 x}}.$$

5.2.5. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \sin^6 3x;$$

$$2) y = \operatorname{ctg}^4(x^2);$$

$$3) y = \arccos^2 4x;$$

$$4) y = \ln^3(\operatorname{arctg} x) - \ln 3;$$

$$5) y = \arcsin^6(\sqrt{x});$$

$$6) y = 2^{\cos(x^3)};$$

$$7) y = (\log_2(\operatorname{tg} x^3))^2;$$

$$8) y = 5^{\operatorname{ctg}^2 4x}.$$

5.2.6. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \sqrt{\sin^4(\log_5 \sqrt{x})};$$

$$2) y = \operatorname{ctg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2^{\ln x}}} \right);$$

$$3) y = 3^{\sqrt{\cos^2(\arcsin(\lg x))}};$$

$$4) y = \ln \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}};$$

$$5) y = \ln \left(\frac{x^3 \cdot e^{-2x}}{\sqrt{\cos(x^2+1)}} \right);$$

$$6) y = \ln \left(\frac{5^{-x} \cdot \sqrt[4]{x+4}}{x \cdot (x^2+1)^4} \right).$$

5.2.7. Найти дифференциалы следующих функций:

$$1) y = 5\sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{4x^4};$$

$$2) y = 3\cos^2(e^{-x});$$

$$3) y = \ln^2 3 \cdot \log_3(\log_3 x).$$

5.2.8. Найти вторые производные следующих функций:

$$1) y = x^2 \ln x;$$

$$2) y = e^{5x}(3x-1);$$

$$3) y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x;$$

$$4) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Задачи для домашнего задания

5.2.9. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \left(\frac{5+3x}{1-3x} \right)^3;$$

$$2) y = \frac{1}{8} \left(\frac{x^3+1}{x^3-3} \right)^4;$$

$$3) y = \sqrt{\frac{2x^2-3}{2x^2+1}};$$

$$4) y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3 - 2}{x^3 + 1}\right)^2}.$$

5.2.10. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \frac{1}{3(4x+5)^3};$$

$$2) y = \frac{1}{10(x^4 - 1)^5};$$

$$3) y = \frac{2}{\sqrt[3]{(5x+1)^3}};$$

$$4) y = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}.$$

5.2.11. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$2) y = \frac{3x+6}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

$$3) y = \sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^3};$$

$$4) y = \frac{2x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

5.2.12. Найти производные следующих функций:

$$1) y = \arccos \sqrt{x^3};$$

$$2) y = \ln 3 \cdot \log_3 \sqrt{1+x^2};$$

$$3) y = \sin \frac{1}{x};$$

$$4) y = 3^{u^3 x}.$$

5.2.13. Найти производные следующих функций:

1) $y = \cos^4 x^3 + \sqrt{7}$;

2) $y = \operatorname{tg}^3(\ln x)$;

3) $y = \arcsin^2 3x$;

4) $y = \operatorname{arctg}(2^{\sin x})$;

5) $y = \ln^2(\operatorname{ctg} 4x)$;

6) $y = 2^{\arccos(\sqrt{x})}$;

7) $y = (\log_3(\ln x))^2$;

8) $y = 4^{\sqrt{\lg(x^2)}}$.

5.2.14. Найти производные следующих функций:

1) $y = \sqrt{\cos^8(\arcsin \sqrt[4]{x})}$;

2) $y = 3^{\operatorname{tg}^2\left(\arccos \frac{\ln 3}{\ln x}\right)}$;

3) $y = 2 \cos^2\left(\frac{1}{2} e^{-x^2}\right)$;

4) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$;

5) $y = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot (2x + 1)^3}{e^{-5x} \cdot \sqrt[3]{9x - 1}} \right)$;

6) $y = \ln \left(\frac{x^5 \cdot \sqrt[3]{3x + 1}}{4^{-x} \cdot \sin^3 x} \right)$.

5.2.15. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = 4 \cdot \sqrt[4]{x^7} - \frac{1}{10x^5}$;

2) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

3) $y = \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$.

5. Производная и дифференциал функции

5.2.16. Найти вторые производные следующих функций:

1) $y = \frac{\ln x}{x}$;

2) $y = e^{-3x}(5x+2)$;

3) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$;

4) $y = \arctg \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ответы

5.2.1. 1) $\frac{16(2x-1)^3}{(2x+1)^5}$; 2) $\frac{40x(x^2-3)^4}{(x^2+1)^6}$; 3) $\sqrt{\frac{4x+1}{4x-1}} \frac{4}{(4x+1)^2}$;

4) $\sqrt[3]{\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^2} \frac{-4}{(2x-5)^2}$.

5.2.2. 1) $\frac{-6}{(2x-5)^4}$; 2) $y = \frac{-12x^2}{(x^3+1)^5}$; 3) $\frac{-1}{\sqrt[4]{(2x-4)^5}}$;

4) $\sqrt[5]{\left(\frac{x^2-1}{5}\right)^4} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

5.2.3. 1) $\frac{6x^2-8x-3}{2\sqrt{(x-1)^3}}$; 2) $\frac{3x^2-2x+18}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^4}}$; 3) $\frac{0,25}{\sqrt[4]{x^3(1+\sqrt{x})}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$;

4) $\frac{4x-5x^4}{\sqrt{(1+x^3)^5}}$.

5.2.4. 1) $\frac{2x}{1+x^4}$; 2) $2\operatorname{ctg} 2x$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{2^{\sqrt{\log_2 x}}}{2x\sqrt{\log_2 x}}$.

5.2.5. 1) $18\sin^5 3x \cos 3x$; 2) $\frac{-8x \operatorname{ctg}^3(x^2)}{\sin^2(x^2)}$; 3) $\frac{-8 \arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$;

$$4) \frac{3 \ln^2(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}; 5) \frac{3 \arcsin^5 \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}};$$

$$6) -3x^2 \sin(x^3) 2^{\cos x^3} \ln 2; 7) \frac{6x^2 \log_2(\operatorname{tg} x^3)}{\cos^2(x^3) \operatorname{tg}(x^3) \ln 2};$$

$$8) \frac{12 \operatorname{ctg}^2 4x 5^{\operatorname{ctg}^4 4x} \ln 5}{-\sin^2 4x}.$$

$$5.2.6. 1) \frac{\sin(\log_5 x)}{2x \ln 5}; 2) \frac{2^{\ln x} \ln 2}{x}; 3) 3^{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2} \cdot \frac{4 \ln 3(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x)}{\cos^2 x};$$

$$4) \frac{0,5\sqrt{x}}{x^2-x}; 5) \frac{3}{x} - 2 + x \operatorname{tg}(x^2+1);$$

$$6) \frac{1}{4x+16} - \ln 5 - \frac{1}{x} - \frac{8x}{x^2+1}.$$

$$5.2.7. 1) \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^5} \right) dx; 2) 3 \sin(2e^{-x}) e^{-x} dx; 3) \frac{dx}{x \log_3 x}.$$

$$5.2.8. 1) 3 + 2 \ln x; 2) 5e^{5x} (15x+1); 3) 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2};$$

$$4) \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$5.2.9. 1) \frac{54(5+3x)^2}{(1-3x)^4}; 2) \frac{-6x^2(x^3+1)^3}{(x^3-3)^5}; 3) \sqrt{\frac{2x^2+1}{2x^2-3}} \frac{8x}{(2x^2+1)^2};$$

$$4) \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3-2}} \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

$$5.2.10. 1) \frac{-4}{(4x+5)^4}; 2) \frac{-2x^3}{(x^4-1)^6}; 3) \frac{-6}{\sqrt[3]{(5x+1)^8}}; 4) \frac{-1}{\sqrt{x(\sqrt{x}+1)^3}}.$$

$$5.2.11. 1) \frac{3x^2+2x^4}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; 2) \frac{x-3\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}-1)^2}; 3) \sqrt[4]{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \frac{0,75}{(x-\sqrt{x^3})^2};$$

$$4) \frac{-6x^2}{\sqrt{(x^2-1)^5}}.$$

$$5.2.12. 1) \frac{-1,5\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}; 2) \frac{x}{1+x^2}; 3) \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}; 4) \frac{2 \cdot 3^{1/9^2 x} \ln 3 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}.$$

$$5.2.13. 1) -12x^2 \cdot \cos^3 x^3 \cdot \sin x^3; 2) \frac{3 \operatorname{tg}^2(\ln x)}{x \cos^2(\ln x)}; 3) \frac{6 \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}};$$

$$4) \frac{2^{\sin x} \cos x \ln 2}{1+4^{\sin x}}; 5) \frac{-8 \ln(\operatorname{ctg} 4x)}{\operatorname{ctg} 4x \cdot \sin^2 4x}; 6) \frac{2^{\arccos(\sqrt{x})} \ln 2}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}};$$

$$7) \frac{2 \log_3(\ln x)}{x \ln 3 \ln x}; 8) \frac{x \cdot 4^{\sqrt{\operatorname{tg}(x^2)}} \ln 4}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^2)} \cos^2(x^2)}.$$

$$5.2.14. 1) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}; 2) \frac{3^{(\log_3 x)^2} \log_3 x^2}{x}; 3) \frac{2x \sin(e^{-x^2})}{e^{x^2}}; 4) \frac{1}{\cos x};$$

$$5) \frac{x}{x^2+1} + \frac{6}{2x+1} + 5 - \frac{3}{9x-1}; 6) \frac{5}{x} + \frac{1}{3x+1} + \ln 4 - 3 \operatorname{ctg} x.$$

$$5.2.15. 1) \left(7 \cdot \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{2x^6} \right) dx; 2) \frac{\operatorname{arctg} x dx}{-x^2}; 3) \frac{2dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$5.2.16. 1) \frac{2 \ln x - 3}{x^3}; 2) e^{-3x} (45x - 12); 3) \frac{6x}{(x+1)^4}; 4) \frac{x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

5.3. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Кривизна плоской линии

1⁰. Метод нахождения производной, при котором функция вначале логарифмируется, а затем дифференцируется, называется *методом логарифмического дифференцирования*. Этот метод применяется для нахождения производной *показательно-степенной*

функции u' , где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Его также целесообразно применять для дифференцирования функций, которые содержат действия: умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

2°. Функция, заданная уравнением $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно y , называется *неявно заданной*. Для нахождения производной y' от функции, заданной неявно, нет необходимости разрешать уравнение относительно y , а достаточно продифференцировать уравнение $F(x; y) = 0$ по x , учитывая, что y есть функция от x , а затем выразить y' из полученного уравнения.

3°. Если зависимость между аргументом x и функцией y задана в виде системы уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t — некоторая переменная, то задание функции $y = f(x)$ называется *параметрическим*. При параметрическом задании функции первая производная y'_x находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, вторая — $y''_{xx} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}$.

4°. Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна вычисляется по формуле $k = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$. Кривизна окружности равна $k = \frac{1}{r}$, где r — радиус окружности; кривизна прямой равна нулю.

Задачи для решения на практическом занятии

5.3.1. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^{\lg x}$;

2) $y = (\cos x)^x$;

3) $y = (\ln x)^{\arcsin 2x}$;

4) $y = \frac{(x-2)^2}{e^{5x} \cdot \sqrt[3]{x}}$;

5) $y = x^{x'}$.

5.3.2. Найти производные следующих функций:

1) $x^3 + y^3 - xy = 3$;

$$2) x \sin y - y^2 3^x = \sqrt{2};$$

$$3) yx = \cos(x - y);$$

$$4) y^x = x^y.$$

5.3.3. Найти производные следующих функций:

$$1) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t \\ y = \ln(1 + 4t^2) \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = \arccos 3t \\ y = \sqrt{1 - 9t^2} \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

5.3.4. Найти вторые производные следующих функций:

$$1) \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t \\ y = \sqrt{1 + 9t^2} \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = \arccos 2t \\ y = \sqrt{(1 - 4t^2)^3} \end{cases}.$$

Задачи для домашнего задания

5.3.5. Найти производные следующих функций:

$$1) y = x^{\sin x};$$

$$2) y = (\operatorname{ctg} x)^x;$$

$$3) y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} 3x};$$

$$4) y = \frac{\sqrt[4]{x+2}}{e^{-x} \cdot x^8};$$

$$5) y = x^{x^{x^2}}.$$

5.3.6. Найти производные следующих функций:

1) $x^2 - y^2 + xy = 2$;

2) $y^2 e^x - x^2 2^y = \pi$;

3) $yx = \sin(x + y)$;

4) $y^{x+1} = x^{y-1}$.

5.3.7. Найти производные следующих функций:

1) $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^2 + t^4 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \sqrt{1 - 4t^2} \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = \frac{1}{1 + 9t^2} \\ y = \arctg^2 3t \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$.

5.3.8. Найти вторые производные следующих функций:

1) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x = \arcsin 3t \\ y = \ln(1 - 9t^2) \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \end{cases}$.

Ответы

5.3.1. 1) $x^{xy} \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)$; 2) $(\cos x)^x (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$;

5. Производная и дифференциал функции

$$3) (\ln x)^{\arcsin 2x} \left(\frac{\arcsin 2x}{x \ln x} + \frac{2 \ln(\ln x)}{\sqrt{1-4x^2}} \right);$$

$$4) \frac{(x-3)^2}{e^{5x} \cdot \sqrt[5]{x}} \left(\frac{2}{x-3} - 5 - \frac{1}{5x} \right); 5) x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right).$$

$$5.3.2. 1) \frac{y-3x^2}{3y^2-x}; 2) \frac{y^2 3^x \ln 3 - \sin y}{x \cos y - 2y 3^x}; 3) \frac{\sin(x-y) + y}{\sin(x-y) - x};$$

$$4) \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}.$$

$$5.3.3. 1) -\operatorname{ctg} t; 2) 4t; 3) 3t; 4) -1,5 \sin t.$$

$$5.3.4. 1) \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}; 2) (1+18t^2)\sqrt{1+9t^2}; 3) (36t^2-3)\sqrt{1-4t^2}.$$

$$5.3.5. 1) x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right); 2) (\operatorname{ctg} x)^x \left(\ln \operatorname{ctg} x - \frac{2x}{\sin 2x} \right);$$

$$3) (\cos x)^{\operatorname{arctg} 3x} \left(\frac{3 \ln(\cos x)}{1+9x^2} - \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{ctg} x} \right);$$

$$4) \frac{\sqrt[4]{x+2}}{e^{-x} \cdot x^8} \left(\frac{1}{4x+8} + 1 - \frac{8}{x} \right);$$

$$5) x^{x^{x^2}} \cdot x^{x^2} \left(x(2 \ln^2 x + \ln x) + \frac{1}{x} \right).$$

$$5.3.6. 1) \frac{y+2x}{2y-x}; 2) \frac{2^y 2x - y^2 e^x}{2y e^x - x^2 2^y \ln 2}; 3) \frac{\cos(x+y) - y}{x - \cos(x+y)};$$

$$4) \frac{y(x \ln y - y + 1)}{x(y \ln x - x - 1)}.$$

$$5.3.7. 1) 1+2t^2; 2) -2t; 3) \frac{(1+9t^2)\operatorname{arctg} 3t}{-3t}; 4) \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

$$5.3.8. 1) \frac{-1}{\sin^3 2t}; 2) \frac{-2}{1-9t^2}; 3) \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}.$$

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Простейшие свойства функций.

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Правило Лопиталя

1°. Пусть даны два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое для каждого элемента x из множества X определяет один и только один элемент y из множества Y , называется *функцией* и записывается $y = f(x)$. Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех y , принадлежащих Y , называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

2°. Функция $y = f(x)$, у которой $D(f)$ симметрична относительно точки $x = 0$, называется *четной (нечетной)*, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). В противном случае, если $D(f)$ несимметрична относительно точки $x = 0$ или $f(-x) \neq \pm f(x)$, функция $y = f(x)$ называется функцией *общего вида*. График четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3°. Интервалы, принадлежащие $D(f)$, в которых функция $y = f(x)$ или только положительна, или только отрицательна, называются *интервалами знакопостоянства*.

4°. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная линейная часть ее приращения Δy , равная произведению производной функции $f'(x)$ на приращение аргумента Δx , и обозначается dy : $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Из определения дифференциала функ-

6. Приложения производной функции одной переменной

ции следует приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, из которого выводится формула для вычисления приближенных значений функции $f(x)$: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

5°. **Теорема Лопиталья.** Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $\varphi'(x_0) \neq 0$, выполняется или равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0, \text{ или равенство } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty,$$

и существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$,

$$\text{причем } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание. Теорема Лопиталья справедлива и в том случае, когда $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

Задачи для решения на практическом занятии

6.1.1. Найти области определения функций:

$$1) y = \ln \left(\frac{2x-4}{18-3x} \right);$$

$$2) y = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-5x+4}};$$

$$3) y = \frac{\ln(x^2-4x)}{x+2};$$

$$4) y = \frac{\sqrt{10-2x}}{\ln x}.$$

6.1.2. Какие из перечисленных ниже функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$1) y = \ln(x^2 + 4);$$

$$2) y = x \cdot \ln(x^2 - 4);$$

$$3) y = \frac{\ln(9-x^2)}{x+1};$$

4) $y = x \cdot e^x$;

5) $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.

6.1.3. Найти точки пересечения графиков функций с осями координат и указать интервалы знакопостоянства функций:

1) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$;

2) $y = (x - 2) \cdot e^x$;

3) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;

4) $y = x \ln(x + 3)$;

5) $y = \frac{e^x}{x^2}$.

6.1.4. Вычислить приближенное значение функции, заменяя приращение функции ее дифференциалом:

1) $\sqrt[3]{1,06}$;

2) $e^{-0,04}$;

3) $\cos 62^\circ$;

4) $\arctg 0,3$.

6.1.5. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{\ln x} \right)$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot e^{-5x})$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{\sin x})$.

Задачи для домашнего задания

✓

6.1.6. Найти области определения функций:

1) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4}$;

6. Приложения производной функции одной переменной

$$2) y = \ln(9x - x^2);$$

$$3) y = \sqrt{\frac{-x+5}{3x+3}};$$

$$4) y = \frac{2}{(x-3) \cdot \ln x}.$$

6.1.7. Какие из перечисленных ниже функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными:

$$1) y = \frac{x^2}{x^2 - 9};$$

$$2) y = x \cdot e^{x^2};$$

$$3) y = \frac{x^3}{x-9};$$

$$4) y = x^2 \ln(x+5);$$

$$5) y = \frac{x^2}{e^x}.$$

6.1.8. Найти точки пересечения графиков функций с осями координат и указать интервалы знакопостоянства функций:

$$1) y = (x+1) \cdot e^x;$$

$$2) y = \ln(x^2 - 3);$$

$$3) y = \frac{x^2 - 4}{x+1};$$

$$4) y = \frac{\ln(x-3)}{x};$$

$$5) y = \frac{e^x}{x-2}.$$

6.1.9. Вычислить приближенное значение функции, заменяя приращение функции ее дифференциалом:

$$1) \sqrt[4]{80,46};$$

$$2) e^{0,08};$$

$$3) \sin 26^\circ;$$

$$4) \arcsin 0,06.$$

6.1.10. Найти пределы функций, применяя правило Лопиталю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \ln x$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{ctg} x}$.

Ответы

6.1.1. 1) $(2; 6)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$;

3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (4; +\infty)$; 4) $(0; 1) \cup (1; 5]$.

6.1.2. 1) Четная; 2) нечетная; 3) общего вида; 4) общего вида;
5) нечетная.

6.1.3. 1) С осями координат точек пересечения нет; $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$;

2) с Ox : $A(2; 0)$; с Oy : $B(0; -2)$; $y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$;

3) $O(0; 0)$; $y > 0$ при $-2 < x < 0$, $x > 2$; $y < 0$ при $x < -2$, $0 < x < 2$;

г) $O(0; 0)$; с Ox : $A(-2; 0)$; $y > 0$ при $-3 < x < -2$, $x > 0$; $y < 0$ при $-2 < x < 0$;

4) с осями координат точек пересечения нет; $y > 0$ при $x \neq 0$.

6.1.4. 1) 1,02; 2) 0,96; 3) 0,47; 4) 0,3.

6.1.5. 1) 2; 2) -0,5; 3) 0; 4) 1.

6.1.6. 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) $(0; 9)$; 3) $(-1; 5]$;

4) $(0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

6.1.7. 1) четная; 2) нечетная; 3) общего вида; 4) общего вида;
5) общего вида.

6.1.8. 1) с Ox : $A(-1; 0)$; с Oy : $B(0; 1)$; $y > 0$ при $x > -1$; $y < 0$ при $x < -1$;

2) с Ox : $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$; $y > 0$ при $x < -2$, $x > 2$; $y < 0$ при $-2 < x < -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} < x < 2$;

6. Приложения производной функции одной переменной

3) с $Ox: A(-2; 0), B(2; 0)$; с $Oy: C(0; -4)$; $y > 0$ при $-2 < x < -1$,
 $x > 2$; $y < 0$ при $x < -2, -1 < x < 2$;

4) с $Ox: A(4; 0)$; $y > 0$ при $x > 4$; $y < 0$ при $3 < x < 4$;

5) с $Oy: C(0; -0,5)$; $y > 0$ при $x > 2$; $y < 0$ при $x < 2$.

6.1.9. 1) 2,995; 2) 1,08; 3) 0,44; 4) 0,06.

6.1.10. 1) 0; 2) ∞ ; 3) 0; 4) 1.

6.2. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции

1°. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в интервале $(a; b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Функция, которая возрастает или убывает в интервале $(a; b)$, называется *монотонной* в этом интервале, а указанный интервал называется *интервалом монотонности*.

2°. *Теорема (необходимые условия)*. Если дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) в этом интервале, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a; b)$.

3°. *Теорема (достаточные условия)*. Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a; b)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале $(a; b)$.

4°. Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$). Значения функции в точках максимума (минимума) называются *максимумом (минимумом)* функции. Точки максимума (минимума) называются *точками экстремума*, а максимум (минимум) — *экстремумом* функции.

5°. *Теорема (необходимые условия)*. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю или не существует. Точки непрерывности функции $f(x)$, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими*.

6°. *Теорема (достаточные условия)*. Если непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической

точки x_0 (за исключением, может быть, самой точки x_0) и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс — точка минимума.

7°. **Теорема (достаточные условия).** Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в этой точке существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ — минимум.

Задачи для решения на практическом занятии

6.2.1. Сделать рисунок с изображением графика функции, для которой в интервале $(a; b)$ выполняются условия:

1) $y < 0, y' < 0$;

2) $y > 0, y' < 0$;

3) $y > 0, y' > 0$;

4) $y < 0, y' > 0$.

6.2.2. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1) $y = x^4 - 4x^3$;

2) $y = \frac{2x}{x^2 + 4}$;

3) $y = \frac{x^2 - 7}{x - 4}$;

4) $y = \frac{(x - 5)^2}{-x + 1}$.

6.2.3. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;

2) $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$;

3) $y = \frac{x^2}{e^{2x}}$;

$$4) y = \frac{x^2}{\ln x};$$

$$5) y = \frac{e^x}{x-1}.$$

Задачи для домашнего задания

6.2.4. Указать рисунок с изображением графика функции (см. рис. 6.2.1–6.2.4), для которой в интервале $(a; b)$ выполняются условия:

1) $y > 0, y' > 0$;

2) $y > 0, y' < 0$;

3) $y < 0, y' < 0$;

4) $y < 0, y' > 0$.

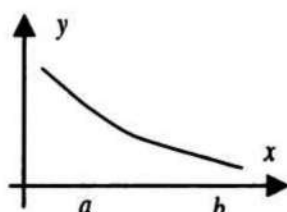


Рис. 6.2.1

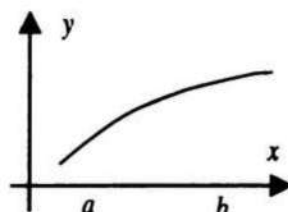


Рис. 6.2.2

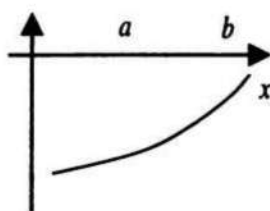


Рис. 6.2.3

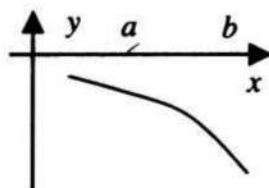


Рис. 6.2.4

6.2.5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1) $y = x^3 - 15x^3$;

2) $y = \frac{3x}{x^2 + 4}$;

$$3) y = \frac{x^2 + 32}{x + 2};$$

$$4) y = \frac{(x+3)^2}{4-x};$$

$$5) y = \frac{(x-4)^2}{x^2 + 8}.$$

6.2.6. Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

$$1) y = \frac{16}{x(4-x^2)};$$

$$2) y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2};$$

$$3) y = \frac{e^x}{x^3};$$

$$4) y = x^2 \cdot \ln x;$$

$$5) y = x \cdot \ln^2 x.$$

Ответы

6.2.2. 1) $(-\infty; 3)$ убывает; $(3; +\infty)$ возрастает; $y_{\min} = y(3) = -27$;

2) $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$ убывает; $(-2; 2)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(-2) = -0,5; \quad y_{\max} = y(2) = 0,5;$$

3) $(-\infty; 1)$, $(7; +\infty)$ возрастает; $(1; 4)$, $(4; 7)$ убывает;

$$y_{\min} = y(7) = 14; \quad y_{\max} = y(1) = 2;$$

4) $(-\infty; -3)$, $(5; +\infty)$ убывает; $(-3; 1)$, $(1; 5)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(-3) = 16; \quad y_{\max} = y(5) = 0.$$

6.2.3. 1) $(-\infty; -2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}; +\infty)$ возрастает; $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2; 2)$,

$$(2; 2\sqrt{3}) \text{ убывает } y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}; \quad y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3};$$

2) $(-\infty; -1)$, $(0; +\infty)$ возрастает; $(-1; 0)$ убывает

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(-1) = 1;$$

3) $(-\infty; 0)$, $(1; +\infty)$ убывает; $(0; 1)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(1) = e^{-2};$$

4) $(0;1)$, $(1;\sqrt{e})$ убывает; $(\sqrt{e};+\infty)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(\sqrt{e}) = 2e;$$

5) $(2;+\infty)$ возрастает; $(-\infty;1)$, $(1;2)$ убывает;

$$y_{\min} = y(2) = e^2.$$

6.2.4. 1) Рис. 6.2.2; 2) рис. 6.2.1; 3) рис. 6.2.4; 4) рис. 6.2.3.

6.2.5. 1) $(-\infty;-3)$, $(3;+\infty)$ возрастает; $(-3;3)$ убывает;

$$y_{\min} = y(3) = -162; \quad y_{\max} = y(-3) = 162;$$

2) $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ убывает; $(-2;2)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(-2) = -0,75; \quad y_{\max} = y(2) = 0,75;$$

3) $(-\infty;-8)$, $(43;+\infty)$ возрастает; $(-8;-2)$, $(-2;4)$ убывает;

$$y_{\min} = y(4) = 8; \quad y_{\max} = y(-8) = -16;$$

4) $(-\infty;-3)$, $(11;+\infty)$ убывает; $(-3;4)$, $(4;11)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(-3) = 0; \quad y_{\max} = y(11) = -28;$$

5) $(-\infty;-2)$, $(4;+\infty)$ возрастает; $(-2;4)$ убывает;

$$y_{\max} = y(-2) = 3; \quad y_{\min} = y(4) = 0.$$

6.2.6. 1) $(-\infty;-2)$, $\left(-2; \frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\right)$, $(2;+\infty)$ возрастает;

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; 0\right), \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ убывает; } y_{\min} = y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{3};$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = -3\sqrt{3};$$

2) $(-\infty;-1)$, $(0;1)$ убывает; $(-1;0)$, $(1;+\infty)$ возрастает;

$$y_{\max} = y(0) = 1; \quad y_{\min} = y(-1) = y(1) = 0;$$

3) $(-\infty;0)$, $(0;3)$ убывает; $(3;+\infty)$ возрастает; $y_{\min} = y(3) = \frac{e^3}{27};$

4) $(0;e^{-0.5})$ убывает; $(e^{-0.5};+\infty)$ возрастает;

$$y_{\min} = y(e^{-0.5}) = -0,5e^{-1};$$

5) $(0;e^{-2})$, $(1;+\infty)$ возрастает; $(e^{-2};1)$ убывает;

$$y_{\min} = y(1) = 0; \quad y_{\max} = y(e^{-2}) = 4e^{-2}.$$

6.3. Выпуклость графика функции. Точка перегиба. Асимптоты

1°. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*выпуклым вверх*) на интервале $(a; b)$, если он расположен выше (ниже) любой ее касательной на этом интервале. Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Замечание. В некоторых источниках график функции выпуклый вниз называют *вогнутым*, а выпуклый вверх — *выпуклым*.

2°. **Теорема (достаточные условия).** Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет *отрицательную* (*положительную*) вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то график функции в этом интервале *выпуклый вверх* (*вниз*).

3°. **Теорема (достаточные условия).** Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, *меняет знак*, то точка графика с абсциссой x_0 есть *точка перегиба*.

4°. *Асимптотой* кривой называется прямая линия, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат. Асимптоты могут быть *вертикальными, наклонными и горизонтальными*.

5°. Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$.

6°. Прямая линия $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если существуют пределы $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Прямая линия $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если существуют пределы

$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$. Если хотя бы один предел не суще-

ствует, то соответствующая асимптота не существует. Если наклонная асимптота существует, причем $k = 0$, то ее называют *горизонтальной*.

Задачи для решения на практическом занятии

6.3.1. Сделать рисунок с изображением графика функции, для которой в интервале $(a;b)$ выполняются условия:

- 1) $y < 0, y' < 0, y'' < 0$;
- 2) $y > 0, y' < 0, y'' > 0$;
- 3) $y > 0, y' > 0, y'' < 0$;
- 4) $y < 0, y' > 0, y'' > 0$;
- 5) $y < 0, y' < 0, y'' > 0$;
- 6) $y > 0, y' < 0, y'' < 0$.

6.3.2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:

1) $y = e^{-2x} \cdot (2x + 5)$;

2) $y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$;

3) $y = \sqrt[3]{x+2}$;

4) $y = e^{-x^2}$;

5) $y = x \cdot \ln^2 x$.

6.3.3. Найти асимптоты кривых:

1) $y = \frac{3x^2 - 7}{x + 4}$;

2) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

3) $y = x \cdot e^{2x}$;

4) $y = x + \frac{\ln x}{x}$;

5) $y = x + \operatorname{arctg} x$.

Задачи для домашнего задания

6.3.4. Указать рисунок с изображением графика функции (см. рис. 6.2.1–6.2.4), для которой в интервале $(a;b)$ выполняются условия:

- 1) $y' > 0, y'' > 0$;
- 2) $y' > 0, y'' < 0$;

$$3) y' < 0, y'' > 0;$$

$$4) y' < 0, y'' < 0.$$

6.3.5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций:

$$1) y = e^{2x} \cdot (x-1);$$

$$2) y = \frac{x}{x^2 + 4};$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x-2)^7};$$

$$4) y = (1+x^2)e^x;$$

$$5) y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

6.3.6. Найти асимптоты кривых:

$$1) y = \frac{2x^2 - x}{x + 4};$$

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}};$$

$$3) y = \frac{1}{1 - e^x};$$

$$4) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$5) y = x \cdot \arctg x.$$

Ответы

6.3.2. 1) $(-\infty; -1,5)$ выпукла вверх; $(-1,5; +\infty)$ выпукла вниз; $A(-1,5; 2e^3)$ точка перегиба; 2) $(-\infty; -6)$, $(0; 6)$ выпукла вниз; $(-6; 0)$, $(6; +\infty)$ выпукла вверх; $A(-6; -4,5)$, $O(0; 0)$, $B(6; 4,5)$ точки перегиба; 3) $(-\infty; -2)$ выпукла вниз; $(-2; +\infty)$ выпукла вверх; $A(-2; 0)$ точка перегиба; 4) $\left(-\infty; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, выпукла вниз; $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ выпукла вверх; $A\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ точки перегиба; 5) $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ выпукла вверх; $(e^{-1}; +\infty)$ выпукла вниз; $A(e^{-1}; e^{-1})$ точка перегиба.

6. Приложения производной функции одной переменной

6.3.3. 1) $x = -4$, $y = 3x - 12$; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -x$ при $x \rightarrow -\infty$; 3) $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; 4) $x = 0$, $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$; 5) $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$.

6.3.4. 1) Рис. 6.2.3; 2) рис. 6.2.2; 3) рис. 6.2.1; 4) рис. 6.2.4.

6.3.5. 1) $(-\infty; 0)$ выпукла вверх; $(0; +\infty)$ выпукла вниз; $A(0; -1)$ точка перегиба; 2) $(-\infty; -2\sqrt{3})$, $(0; 2\sqrt{3})$ выпукла вверх; $(-2\sqrt{3}; 0)$, $(2\sqrt{3}; +\infty)$ выпукла вниз; $A\left(-2\sqrt{3}; \frac{-\sqrt{3}}{8}\right)$, $O(0; 0)$, $B\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ точки перегиба; 3) $(-\infty; 2)$ выпукла вверх; $(2; +\infty)$ выпукла вниз; $(2; 0)$ точка перегиба; 4) $(-\infty; -3)$, $(-1; +\infty)$ выпукла вниз; $(-3; -1)$, выпукла вверх; $A(-3; 10e^{-3})$, $B(-1; 2e^{-1})$ точки перегиба; 5) $(0; \sqrt[4]{e^5})$ выпукла вверх; $(\sqrt[4]{e^5}; +\infty)$ выпукла вниз; $A\left(\sqrt[4]{e^5}; \frac{5}{6 \cdot \sqrt[4]{e^5}}\right)$ точка перегиба.

6.3.6. 1) $x = -4$, $y = 2x - 9$; 2) $y = 1$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -1$ при $x \rightarrow -\infty$; 3) $x = 0$, $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = 1$ при $x \rightarrow -\infty$; 4) $x = 0$, $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$; 5) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ при $x \rightarrow -\infty$.

6.4. Полное исследование функции и построение графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

7. Построить график.

Задачи для решения на практическом занятии

6.4.1. Провести полное исследование функций и построить их графики:

$$1) y = \frac{x^3 + 4}{x^2};$$

$$2) y = \frac{\ln x}{x}.$$

Задачи для домашнего задания

6.4.2. Провести полное исследование функций и построить их графики:

$$1) y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};$$

$$2) y = (x + 4) \cdot e^{2x}.$$

6.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Текстовые задачи

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

- 1) продифференцировать функцию $y = f(x)$;
- 2) найти критические точки функции, принадлежащие интервалу $(a; b)$;
- 3) вычислить значения функции $y = f(x)$ в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. при $x = a$, $x = b$;
- 4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечания. 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$ имеет лишь одну критическую точку и эта точка является точ-

6. Приложения производной функции одной переменной

кой максимума (минимума), то в этой точке функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$ не имеет критических точек, то свое наибольшее значение она достигает на одном конце отрезка, а свое наименьшее значение — на другом.

3. Если требуется отыскать наибольшее или наименьшее значения в интервале $(a; b)$, то в предложенном алгоритме вычисление значений функции $y = f(x)$ в точках $x = a$, $x = b$ заменяют вычислением односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ в этих точках.

Задачи для решения на практическом занятии

6.5.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) $y = x^4 - 4x^3$, $[-1; 2]$;

2) $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$, $[1; 4]$;

3) $y = \sqrt[3]{2x^2 \cdot (x-6)}$, $[-2; 4]$.

6.5.2. Найти на оси Ox точку C , сумма квадратов расстояний от которой до точек $A(2; 4)$ и $B(8; 2)$ имеет наименьшее значение.

6.5.3. Найти стороны прямоугольника, который имеет наибольшую площадь, если сумма трех его сторон равна l .

6.5.4. Найти высоту и диаметр цилиндра, который имеет наибольший объем, если его полная поверхность равна S .

Задачи для домашнего задания

6.5.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1) $y = x^2 - 2x$, $[0; 4]$;

2) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$, $[-4; 2]$;

3) $y = x - 4\sqrt{x+2} + 4$, $[-1; 14]$.

6.5.6. Сумма двух положительных чисел равна 8. Найти эти числа, если сумма их кубов наименьшая.

Практические занятия по математике: теория, задания, ответы

6.5.7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен p . Найти размеры сторон прямоугольника, при которых окно пропускает наибольшее количества света.

6.5.8. Найти высоту и радиус основания конуса, если его объем наибольший (образующая конуса равна l).

Ответы

6.5.1. 1) наименьшее $m = y(2) = -16$; наибольшее $M = y(-1) = 5$;

2) наименьшее $m = y(1) = -1$; наибольшее $M = y(2) = 1$;

3) наименьшее $m = y(-2) = y(4) = -4$; наибольшее

$$M = y(0) = 0.$$

6.5.2. $C(5; 0)$.

6.5.3. При условии, что $2a + b = l$, $a = 0,25l$, $b = 0,5l$.

$$6.5.4. d = h = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

6.5.5. 1) наименьшее $m = y(1) = -1$; наибольшее $M = y(4) = 8$;

2) наименьшее $m = y(-2) = -1$; наибольшее $M = y(2) = 1$;

3) наименьшее $m = y(2) = -2$; наибольшее $M = y(14) = 2$.

6.5.6. 4 и 4.

6.5.7. Основание $a = \frac{2p}{\pi + 4}$, высота прямоугольника $h = \frac{p}{\pi + 4}$.

$$6.5.8. h = \frac{l}{\sqrt{3}}, r = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Простейшие свойства функций.

Частные производные.

Полный дифференциал

1°. Пусть даны два непустых множества D и Z . Соответствие f , которое для каждой пары действительных чисел (x, y) из множества D определяет один и только один элемент z из множества Z , называется *функцией двух переменных* и записывается $z = f(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех z , принадлежащих Z , называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

2°. Область определения в простейших случаях представляет собой либо всю плоскость xOy , либо часть плоскости, ограниченную линией. Эта линия называется *границей* области определения. Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними*; лежащие на границе — *граничными*. Область определения, состоящая только из внутренних точек, называется *открытой*; если к области определения относятся и граничные точки, то она называется *замкнутой*. Данную область называют *ограниченной*, если для нее можно подобрать круг, внутри которого лежат все точки области. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости xOy , в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$. Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность.

3°. Частной производной z'_x по переменной x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$

к вызвавшему его приращению Δx , когда последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется *частная производная* z'_y по переменной y от функции $z = f(x; y)$: $z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$.

Другие обозначения частных производных: $f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

4°. *Полным дифференциалом функции* $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения Δz , равная сумме произведений частных производных функции на соответствующие приращения аргумента Δx и Δy , и обозначается dz : $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$. Так как $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ в точке $(x; y)$ находится по формуле: $dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$. Из определения дифференциала функции следует приближенное равенство $\Delta z \approx dz$, из которого выводится формула для вычисления приближенных значений функции $f(x; y)$: $f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y) \cdot \Delta x + f'_y(x; y) \cdot \Delta y$.

5°. *Частными производными второго порядка* от функции $z = f(x; y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Функция $z = f(x; y)$ имеет четыре частных производных второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x; z''_{xy} = (z'_x)'_y; z''_{yx} = (z'_y)'_x; z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

Смешанные частные производные одной функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Задачи для решения на практическом занятии

7.1.1. Найти и изобразить область определения функций:

1) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

2) $z = \ln(x^2 + y)$;

3) $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$.

7. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

7.1.2. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = x^3 - 3y^2 + x^2y$;

2) $z = \frac{x-y}{x+y}$;

3) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$;

4) $z = \sin^2(x^3y^2)$;

5) $z = x^y$.

7.1.3. Найти полные дифференциалы следующих функций:

1) $z = 3x\sqrt[3]{y^2} + \frac{y}{2x^2}$;

2) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

3) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

4) $z = \arctg(y/x)$.

7.1.4. Вычислить приближенно:

1) $1,04^{2,02}$;

2) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

7.1.5. Найти производные z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} следующих функций:

1) $z = x^3 - y^2 + 3x^2y$;

2) $z = \ln(2x - y)$;

3) $z = x \cdot e^{xy}$.

Задачи для домашнего задания

7.1.6. Найти и изобразить область определения функций:

1) $z = \sqrt{x+y}$;

2) $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$;

3) $z = \sqrt{x} + \sqrt{y+1} - \sqrt{2-x-y}$.

7.1.7. Найти частные производные следующих функций:

1) $z = x^4 + y^3 - xy^2$;

2) $z = \frac{xy}{x+y}$;

$$3) z = \sqrt{x^2 + y};$$

$$4) z = \ln^2(x^3 y);$$

$$5) z = x^y.$$

7.1.8. Найти полные дифференциалы следующих функций:

$$1) z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}};$$

$$2) z = \cos^2(yx^3);$$

$$3) z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x};$$

$$4) z = y^{\ln x}.$$

7.1.9. Вычислить приближенно:

$$1) (1,02)^3 \cdot (0,97)^2;$$

$$2) \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}.$$

7.1.10. Найти производные z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} следующих функций:

$$1) z = x^2 + y^3 - 2xy;$$

$$2) z = \sin(x^2 - y);$$

$$3) z = e^{x+3y}.$$

Ответы

7.1.1. 1) круг с центром в начале координат, радиус которого равен двум, включая окружность ($x^2 + y^2 \leq 4$); 2) часть плоскости, расположенная выше параболы $y = -x^2$, ($x^2 + y > 0$); 3) прямоугольник, образованный отрезками прямых $x = \pm 2$, $y = \pm 3$, включая его стороны ($-2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3$).

$$7.1.2. 1) z'_x = 3x^2 + 2xy, z'_y = -6y + x^2;$$

$$2) z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, z'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2};$$

$$3) z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$4) z'_x = 3x^2 y^2 \sin(2x^3 y^2), z'_y = 2x^3 y \sin(2x^3 y^2);$$

$$5) z'_x = x^{y-1} y, z'_y = x^y \ln x.$$

7. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

$$7.1.3. 1) dz = \left(3\sqrt[3]{y^2} - \frac{y}{x^3} \right) dx + \left(\frac{2x}{\sqrt[3]{y}} + \frac{1}{2x^2} \right) dy;$$

$$2) dz = \frac{4xy(ydx - xdy)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$3) dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(dx + \frac{ydy}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right); \quad 4) dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

$$7.1.4. 1) 1,08; 2) 0,005.$$

$$7.1.5. 1) z''_{xx} = 6x + 6y, \quad z''_{xy} = 6x, \quad z''_{yy} = -2;$$

$$2) z''_{xx} = \frac{-4}{(2x - y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{2}{(2x - y)^2}, \quad z''_{yy} = \frac{-1}{(2x - y)^2};$$

$$3) z''_{xx} = e^{xy}(2y + xy^2), \quad z''_{xy} = e^{xy}(2x + x^2y), \quad z''_{yy} = x^3e^{xy}.$$

7.1.6. 1) часть плоскости, расположенная выше прямой $y = -x$, включая прямую ($y + x \geq 0$); 2) часть плоскости, расположенная вне круга с центром в начале координат, радиус которого равен трем, исключая окружность ($x^2 + y^2 > 9$); 3) треугольник, образованный отрезками прямых $x = 0$, $y = -1$, $y = 2 - x$, включая его стороны ($x \geq 0$, $y \geq -1$, $x + y \leq 2$).

$$7.1.7. 1) z'_x = 4x^3 - y^2, \quad z'_y = 3y^2 - 2xy; \quad 2) z'_x = \frac{y^2}{(x + y)^2},$$

$$z'_y = \frac{x^2}{(x + y)^2}; \quad 3) z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}, \quad z'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}};$$

$$4) z'_x = \frac{6}{x} \ln(x^3 y), \quad z'_y = \frac{2}{y} \ln(x^3 y);$$

$$5) z'_x = x^n (\ln x + 1) y, \quad z'_y = x^{n+1} \ln x.$$

$$7.1.8. 1) dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}} \right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dy;$$

$$2) dz = -x^2 \sin(2yx^3)(3ydx + xdy);$$

$$3) dz = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(dx - \frac{xdy}{y} \right);$$

$$4) dz = y^{\ln x} \left(\frac{\ln y}{x} dx + \frac{\ln x}{y} dy \right).$$

7.1.9. 1) 1,00; 2) 4,998.

7.1.10. 1) $z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{yy} = 6y$; 2) $z''_{xx} = -4x^2 \sin(x^2 - y) + 2 \cos(x^2 - y)$; $z''_{xy} = 2x \sin(x^2 - y)$, $z''_{yy} = -\sin(x^2 - y)$; 3) $z''_{xx} = e^{x+3y}$, $z''_{xy} = 3e^{x+3y}$, $z''_{yy} = 9e^{x+3y}$.

7.2. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области. Производная по направлению и градиент

1°. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $z = f(x; y)$, если существует такая окрестность точки M_0 , что для любой другой точки $M(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ ($f(x_0; y_0) < f(x; y)$). Значения функции в точках максимума (минимума) называются *максимумом (минимумом) функции*. Точки максимума (минимума) называются *точками экстремума*, а максимум (минимум) — *экстремумом функции*.

2°. **Теорема (необходимые условия).** Если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т. е. $z'_x(x_0; y_0) = 0$, $z'_y(x_0; y_0) = 0$. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются *стационарными*.

3°. **Теорема (достаточные условия).** Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x; y)$. Обозначим: $A_0 = z''_{xx}(x_0; y_0)$, $B_0 = z''_{xy}(x_0; y_0)$, $C_0 = z''_{yy}(x_0; y_0)$, $\Delta_0 = A_0 \cdot C_0 - B_0^2$. Тогда:

7. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

если $\Delta_0 > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$, а именно максимум при $A_0 < 0$ (или $C_0 < 0$) и минимум при $A_0 > 0$ (или $C_0 > 0$);

если $\Delta_0 < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ не имеет экстремума;

если $\Delta_0 = 0$, то для определения наличия экстремума требуются дополнительные исследования.

4°. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D :

- 1) продифференцировать функцию $z = f(x; y)$;
- 2) найти стационарные точки функции, расположенные внутри области D ;
- 3) найти критические точки функции, расположенные на границе области;
- 4) выписать угловые точки области;
- 5) вычислить значения функции в найденных точках и среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

5°. Производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $\vec{a}$ называется предел $\frac{\partial z}{\partial a} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta_a z}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема, то производная в направлении $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta,$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

6°. Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные функции z : $\overline{\text{grad} z} = \{z'_x; z'_y\}$. Градиент функции и ее производная в направлении вектора $\vec{a}$ связаны формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \rho \vec{p}_a \overline{\text{grad} z}.$$

Задачи для решения на практическом занятии

7.2.1. Найти экстремумы следующих функций двух переменных:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

2) $z = -x^2 + 6x - 16y + \frac{y^3}{3}$;

3) $z = x^2 + 2y^3 - 6xy$.

7.2.2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями:

1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, Γ : $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, Γ : $y = -1$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 2$.

7.2.3. Найти градиент функции $z = f(x; y)$ в точке $A(x_0; y_0)$:

1) $z = xy^3 + 4x^2y$, $A(-1; 2)$;

2) $z = \ln(4x^2 + 2xy)$, $A(1; 2)$.

7.2.4. Найти производную функции $z = f(x; y)$ в точке $A(x_0; y_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$:

1) $z = \frac{x-y}{x^2+y^2}$, $A(2; -1)$, $\vec{a} = \{-3; 4\}$;

2) $z = \arcsin \frac{y^2}{x}$, $A(2; 1)$, $\vec{a} = \{\sqrt{2}; 1\}$.

Задачи для домашнего задания

7.2.5. Найти экстремумы следующих функций двух переменных:

1) $z = -x^2 - y^2 + 4x - 4y$;

2) $z = \frac{y^2}{2} - y + 4x - \frac{x^3}{3}$;

3) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

7.2.6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в замкнутой области, ограниченной линиями:

1) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, Γ : $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, Γ : $y = x^2$, $y = 4$.

7. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

7.2.7. Найти градиент функции $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0; y_0)$:

1) $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $A(2; -1)$;

2) $z = \arctg \frac{y}{x^2}$, $A(-1; 2)$.

7.2.8. Найти производную функции $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0; y_0)$

в направлении вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$:

1) $z = x^2 y - 4xy^2$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = \{2; -1\}$;

2) $z = \ln(4x - 2y)$, $A(1; -2)$, $\vec{a} = \{3; 4\}$.

Ответы

7.2.1. 1) $z_{\min} = z(1; 0) = -1$; 2) $z_{\max} = z(3; -4) = 51\frac{2}{3}$;

3) $z_{\min} = z(9; 3) = -27$.

7.2.2. 1) наименьшее $m = z(1; 0) = -1$,

наибольшее $M = z(2; 3) = 9$;

2) наименьшее $m = z(0; -1) = z(1; 1) = -1$,

наибольшее $M = z(2; -1) = 13$.

7.2.3. 1) $\{-8; -8\}$; 2) $\{1, 5; 0, 25\}$.

7.2.4. 1) 0, 2; 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

7.2.5. 1) $z_{\max} = z(2; -2) = 8$; 2) $z_{\min} = z(-2; 1) = -5\frac{5}{6}$;

3) $z_{\min} = z(0; 0) = 0$, $z_{\max} = z(\frac{-5}{3}; 0) = 4\frac{17}{27}$.

7.2.6. 1) наименьшее $m = z(1; 0) = -3$,

наибольшее $M = z(1; 2) = 17$;

2) наименьшее $m = z(0; 0) = 0$,

наибольшее $M = z(-2; 4) = z(2; 4) = 32$.

7.2.7. 1) $\{\frac{1}{25}; \frac{7}{25}\}$; 2) $\{\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\}$.

7.2.8. 1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 2) 0, 1.

8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Непосредственное интегрирование.

Подведение под знак дифференциала

1°. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

2°. **Теорема.** Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

3°. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных $F(x) + C$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

4°. Свойства неопределенного интеграла:

$$1) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x);$$

$$2) d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx;$$

$$3) \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4) \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ где } k = \text{const};$$

$$5) \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx;$$

$$6) \text{ Если } \int f(x)dx = F(x) + C \text{ и } u = \varphi(x), \text{ то } \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

5°. Таблица неопределенных интегралов:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ если } \alpha \neq -1;$$

8. Неопределенный интеграл

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad +$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad +$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C; \quad +$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad +$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C; \quad +$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad +$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad +$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad +$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + C; \quad +$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad +$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad +$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad +$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad +$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad +$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \quad +$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad +$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Задачи для решения на практическом занятии

8.1.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x^3 dx$;

2) $\int \frac{dx}{x^5}$;

3) $\int \sqrt[4]{x} dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3}}$;

5) $\int \frac{dx}{x}$;

6) $\int 7^x dx$;

7) $\int 7^{2x} dx$;

8) $\int e^x dx$;

9) $\int 7^x \cdot 5^x dx$;

10) $\int (x^4 - 2x + 3) dx$;

11) $\int \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}) dx$;

12) $\int \frac{x^4 - 2x + 3}{x^2} dx$;

13) $\int \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 3}{x} dx$;

14) $\int \frac{x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} dx$;

15) $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt[4]{x}} dx$;

16) $\int \frac{6^x + 1}{2^x} dx$;

$$17) \int \frac{\sin x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x + 3}{\sin x} dx;$$

$$18) \int \frac{\sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx;$$

$$19) \int \frac{dx}{4 + (2x)^2};$$

$$20) \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x^2}};$$

$$21) \int \frac{dx}{4 + x^2};$$

$$22) \int \frac{dx}{x^2 + 7};$$

$$23) \int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx;$$

$$24) \int \frac{dx}{x^2 - 16};$$

$$25) \int \frac{dx}{x^2 - 3};$$

$$26) \int \frac{dx}{6 - x^2};$$

$$27) \int \frac{(x^2 - 4)dx}{x^2 - 1};$$

$$28) \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}};$$

$$29) \int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}};$$

$$30) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}};$$

$$31) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

- 32) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;
- 33) $\int \frac{(1 + \cos^2 x) dx}{\cos 2x + 1}$;
- 34) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;
- 35) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(x^2+1)}$;
- 36) $\int d(\operatorname{ctg} x)$;
- 37) $\int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x)$;
- 38) $\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}}$;
- 39) $\int \frac{d(3x+5)}{3x+5}$;
- 40) $\int e^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x)$;
- 41) $\int \cos(x^4 + 3) d(x^4 + 3)$;
- 42) $\int \operatorname{tg}(\sqrt{\arcsin x}) d(\sqrt{\arcsin x})$.

Задачи для домашнего задания

8.1.2. Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int x^3 dx$;
- 2) $\int \frac{dx}{x^4}$;
- 3) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$;
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;
- 5) $\int 6^x dx$;

$$6) \int \frac{dx}{3^x};$$

$$7) \int \frac{7^x}{2^x} dx;$$

$$8) \int (x^3 - 2)^2 dx;$$

$$9) \int \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} dx;$$

$$10) \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 5}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$11) \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx;$$

$$12) \int \frac{x-6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3} dx;$$

$$13) \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$14) \int \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^2} + 2\sqrt{x}) dx;$$

$$15) \int \frac{e^{2x} + 4 \cdot e^x - 3}{e^x} dx;$$

$$16) \int \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x + 3}{\cos x} dx;$$

$$17) \int \frac{\sin x \cdot \cos x - 3}{\sin^2 x} dx;$$

$$18) \int \frac{dx}{9+9x^2};$$

$$19) \int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x)^2}};$$

$$20) \int \frac{dx}{3+x^2};$$

$$21) \int \frac{dx}{x^2 + 9};$$

$$22) \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} dx;$$

$$23) \int \frac{dx}{x^2 - 9};$$

$$24) \int \frac{dx}{5 - x^2};$$

$$25) \int \frac{(x^2 + 1)dx}{x^2 - 1};$$

$$26) \int \frac{(2x^2 - 9)dx}{x^2 - 4};$$

$$27) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$28) \int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}};$$

$$29) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}};$$

$$30) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6}};$$

$$31) \int \operatorname{ctg}^2 x dx;$$

$$32) \int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x};$$

$$33) \int \frac{(1 + 2x^2)dx}{x^2(x^2 + 1)};$$

$$34) \int d(\ln x);$$

$$35) \int \operatorname{ctg}^3 x d(\operatorname{ctg} x);$$

$$36) \int \frac{d(e^x + 3)}{\sqrt{e^x + 3}};$$

- 37) $\int 5^{\operatorname{arctg} x} d(\operatorname{tg} x)$;
 38) $\int \sin(x^3 - 2) d(x^3 - 2)$;
 39) $\int \operatorname{ctg}(\sqrt{\operatorname{arctg} x}) d(\sqrt{\operatorname{arctg} x})$.

ОТВЕТЫ

- 8.1.1. 1) $\frac{x^4}{4} + C$; 2) $\frac{-1}{4x^4} + C$; 3) $\frac{4 \cdot \sqrt[4]{x^5}}{5} + C$; 4) $\frac{7 \cdot \sqrt[7]{x^4}}{4} + C$;
 5) $\ln|x| + C$; 6) $\frac{7^x}{\ln 7} + C$; 7) $\frac{49^x}{\ln 49} + C$; 8) $e^x + C$;
 9) $\frac{35^x}{\ln 35} + C$; 10) $\frac{x^5}{5} - x^2 + 3x + C$; 11) $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} - \frac{12\sqrt[4]{x^{11}}}{11} + C$;
 12) $\frac{x^3}{3} - 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$; 13) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + 3\ln|x| + C$;
 14) $\frac{x^2}{2} + 2x + 6\sqrt{x} + C$; 15) $\frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + \frac{16\sqrt[4]{x^5}}{5} + \frac{16\sqrt[4]{x^3}}{3} + C$;
 16) $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$; 17) $\sin x + 2\cos x + 3\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$;
 18) $-\ln|\cos x| - 2x + 3\operatorname{tg} x + C$; 19) $\frac{\operatorname{arctg} x}{4} + C$;
 20) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{2}} + C$; 21) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; 22) $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C$;
 23) $x + \operatorname{arctg} x + C$; 24) $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C$;
 25) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C$; 26) $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x+\sqrt{6}}{x-\sqrt{6}} \right| + C$;
 27) $x - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$; 28) $\arcsin \frac{x}{3} + C$; 29) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{8}} + C$;
 30) $\ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| + C$; 31) $\ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C$;

$$32) \operatorname{tg} x - x + C; 33) \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} + C; 34) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C;$$

$$35) \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C; 36) \operatorname{ctg} x + C; 37) \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C;$$

$$38) 2\sqrt{\sin x} + C; 39) \ln|3x+5| + C; 40) e^{\operatorname{tg} x} + C;$$

$$41) \sin(x^4 + 3) + C; 42) -\ln|\cos \sqrt{\arcsin x}| + C.$$

$$8.1.2. 1) \frac{x^9}{9} + C; 2) \frac{-1}{3x^3} + C; 3) \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}{5} + C; 4) \frac{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}{4} + C;$$

$$5) \frac{6^x}{\ln 6} + C; 6) \frac{-1}{3^x \ln 3} + C; 7) \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 3,5} + C;$$

$$8) \frac{x^7}{7} - x^4 + 4x + C; 9) \frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln|x| + C;$$

$$10) x - \ln|x| - \frac{10}{\sqrt{x}} + C; 11) \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} - 2x + C;$$

$$12) \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 3x + C; 13) \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} - \frac{8\sqrt[4]{x^5}}{5} + \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + C;$$

$$14) \frac{12\sqrt[12]{x^{23}}}{23} + \frac{8\sqrt[8]{x^7}}{7} + C; 15) e^x + 4x + 3e^{-x} + C;$$

$$16) -\cos x + \ln|\cos x| + 3 \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + C;$$

$$17) \ln|\sin x| + 3\operatorname{ctg} x + C; 18) \frac{\operatorname{arctg} x}{9} + C; 19) \frac{\arcsin x}{2} + C;$$

$$20) \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C; 21) \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C;$$

$$22) x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C; 23) \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C;$$

$$24) \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}} \right| + C; 25) x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C;$$

$$26) 2x - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C; \quad 27) \arcsin \frac{x}{2} + C;$$

$$28) \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C; \quad 29) \ln |x + \sqrt{x^2 + 5}| + C;$$

$$30) \ln |x + \sqrt{x^2 - 6}| + C; \quad 31) -\operatorname{ctgx} - x + C;$$

$$32) -\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} + C; \quad 33) \frac{-1}{x} + \operatorname{arctgx} + C; \quad 34) \ln x + C;$$

$$35) \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + C; \quad 36) 2\sqrt{e^x + 3} + C; \quad 37) \frac{5^{19x}}{\ln 5} + C;$$

$$38) -\cos(x^5 - 2) + C; \quad 39) \ln |\sin \sqrt{\operatorname{arctgx}}| + C.$$

8.2. Подведение под знак дифференциала

Задачи для решения на практическом занятии

8.2.1. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int (x+2)^7 dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{(3x-1)^6};$$

$$3) \int \sqrt[4]{(4x+3)^3} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{5x+2};$$

$$5) \int e^{-x} dx;$$

$$6) \int 6^{2x-5} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{7^{3x-2}};$$

$$8) \int \sin 5x dx;$$

$$9) \int \operatorname{ctg}(7x-1) dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)};$$

$$11) \int x e^{3x^2+1} dx;$$

$$12) \int x \cos(5x^2) dx;$$

$$13) \int \frac{x dx}{4x^2 + 3};$$

$$14) \int \frac{x dx}{x^4 + 1};$$

$$15) \int \frac{x dx}{\sqrt{9 - x^4}};$$

$$16) \int \frac{x dx}{\sqrt{4 - 3x^2}};$$

$$17) \int x^2 (5x^3 - 3)^7 dx;$$

$$18) \int x^3 \sqrt{5x^4 + 3} dx;$$

$$19) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 3}};$$

$$20) \int \frac{\cos x dx}{9 + \sin^2 x};$$

$$21) \int \frac{\sin x dx}{16 - \cos^2 x};$$

$$22) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}};$$

$$23) \int \frac{\ln^4 x dx}{x};$$

$$24) \int \frac{\arctg x dx}{x^2 + 1};$$

$$25) \int \frac{\arcsin^4 x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$26) \int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)};$$

$$27) \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx;$$

$$28) \int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-9}} dx;$$

$$29) \int \frac{3x+2}{x^2-9} dx;$$

$$30) \int \frac{(3x + \arctg^3 x) dx}{1+x^2};$$

$$31) \int \frac{x - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задачи для домашнего задания

8.2.2. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int (x-2)^5 dx;$$

$$2) \int \frac{dx}{(5x+3)^4};$$

$$3) \int \sqrt[3]{(3x-2)^3} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{4x-3};$$

$$5) \int e^{-2x+3} dx;$$

$$6) \int 5^{-x} dx;$$

$$7) \int 3^{2x+5} dx;$$

$$8) \int \cos 3x dx;$$

$$9) \int \operatorname{tg}(2x+1) dx;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)};$$

$$11) \int x e^{4x^2-3} dx;$$

$$12) \int x \sin(3x^2) dx;$$

$$13) \int \frac{x dx}{5x^2 - 4};$$

$$14) \int \frac{x dx}{x^4 - 1};$$

$$15) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 9}};$$

$$16) \int \frac{x dx}{\sqrt{-3x^2 + 5}};$$

$$17) \int x^2 (2x^3 + 5)^6 dx;$$

$$18) \int x^3 \sqrt{3x^4 - 5} dx;$$

$$19) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^3 - 4}};$$

$$20) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{9 + \sin^2 x}};$$

$$21) \int \frac{\sin x dx}{25 + \cos^2 x};$$

$$22) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 7}};$$

$$23) \int \frac{dx}{x \ln^5 x};$$

$$\sqrt{24) \int \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{x^2 + 1}};$$

$$25) \int \frac{\arccos^3 x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$26) \int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 4)};$$

$$\checkmark 27) \int \frac{7x-1}{x^2-4} dx;$$

$$\checkmark 28) \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+7}};$$

$$\checkmark 29) \int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$\checkmark 30) \int \frac{(x-\sqrt{\arctg x})dx}{1+x^2};$$

$$\checkmark 31) \int \frac{x+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ответы

$$8.2.1. 1) \frac{(x+2)^8}{8} + C; 2) \frac{-1}{15(3x-1)^5} + C; 3) \frac{\sqrt[4]{(4x+3)^7}}{7} + C;$$

$$4) \frac{\ln|5x+2|}{5} + C; 5) -e^{-x} + C; 6) \frac{6^{2x-5}}{2\ln 6} + C; 7) \frac{7^{-3x+2}}{-3\ln 7} + C;$$

$$8) \frac{\cos 5x}{-5} + C; 9) \frac{\ln|\sin(7x-1)|}{7} + C; 10) \frac{\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)}{3} + C;$$

$$11) \frac{e^{3x^2+1}}{6} + C; 12) \frac{\sin(5x^2)}{10} + C; 13) \frac{\ln|4x^2+3|}{8} + C;$$

$$14) \frac{\arctg(x^2)}{2} + C; 15) \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{3} + C; 16) \frac{\sqrt{4-3x^2}}{-3} + C;$$

$$17) \frac{(5x^3-3)^8}{120} + C; 18) \frac{\sqrt{(5x^4+3)^3}}{30} + C;$$

$$19) \frac{1}{3} \ln|x^3 + \sqrt{x^6+3}| + C; 20) \frac{1}{3} \arctg \frac{\sin x}{3} + C;$$

$$21) \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\cos x - 4}{\cos x + 4} \right| + C; 22) \arcsin \frac{e^x}{2} + C; 23) \frac{\ln^5 x}{5} + C;$$

$$24) \frac{-\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C; 25) \frac{\arcsin^5 x}{5} + C; 26) \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\ln x - 3}{\ln x + 3} \right| + C;$$

$$27) \frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C;$$

$$28) 5\sqrt{x^2 - 9} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C;$$

$$29) \frac{3}{2} \ln|x^2 - 9| + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C;$$

$$30) \frac{3}{2} \ln|x^2 + 1| + \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C;$$

$$31) -\sqrt{1 - x^2} + \frac{2\sqrt{\arccos^3 x}}{3} + C.$$

$$8.2.2. 1) \frac{(x-2)^6}{6} + C; 2) \frac{-1}{15(5x+3)^3} + C; 3) \frac{5\sqrt[5]{(3x-2)^8}}{24} + C;$$

$$4) \frac{\ln|4x-3|}{4} + C; 5) \frac{e^{-2x+3}}{-2} + C; 6) \frac{-5^{-x}}{\ln 5} + C; 7) \frac{3^{2x+5}}{2 \ln 3} + C;$$

$$8) \frac{\sin 3x}{3} + C; 9) \frac{\ln|\cos(2x+1)|}{-2} + C; 10) \frac{\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{-3} + C;$$

$$11) \frac{e^{4x^2-3}}{8} + C; 12) \frac{\cos(3x^2)}{-6} + C; 13) \frac{\ln|5x^2-4|}{10} + C;$$

$$14) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| + C; 15) \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{x^4 + 9}| + C;$$

$$16) \frac{\sqrt{5-3x^2}}{-3} + C; 17) \frac{(2x^3+5)^7}{42} + C; 18) \frac{\sqrt{(3x^4-5)^3}}{18} + C;$$

$$19) \frac{1}{4} \ln|x^4 + \sqrt{x^8 - 4}| + C; 20) \ln|\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 9}| + C;$$

$$21) \frac{-1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{5} + C; 22) \ln|e^x + \sqrt{e^{2x} + 7}| + C;$$

$$\begin{aligned}
& 23) \frac{\ln^4 x}{-4} + C; \quad 24) \frac{2\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{3} + C; \quad 25) \frac{\arccos^4 x}{-4} + C; \\
& 26) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{2} + C; \quad 27) \frac{7}{2} \ln |x^2 - 4| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C; \\
& 28) \sqrt{x^2 + 7} + \ln |x + \sqrt{x^2 + 7}| + C; \\
& 29) -3\sqrt{9 - x^2} + \arcsin \frac{x}{3} + C; \\
& 30) \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + \frac{2\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}}{3} + C; \\
& 31) -\sqrt{1 - x^2} + \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.
\end{aligned}$$

8.3. Замена переменной.

Интегрирование по частям.

Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен (два практических занятия)

1°. Замена переменных в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

а) $x = \varphi(t)$, где $x = \varphi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . Формула замены переменной в этом случае: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$;

б) $z = \varphi(x)$, где z — новая функция. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(z) dz$.

2°. Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int u dv = uv - \int v du$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции от x . С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда

последний интеграл либо проще исходного, либо подобен ему. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть легко найден. Иногда эту формулу приходится использовать по несколько раз.

Укажем типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x) \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, $\int P(x) e^{kx} dx$, $\int P(x) a^{kx} dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители;

2. Интегралы вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \operatorname{arccotg} x dx$, $\int P(x) \ln x dx$. Удобно положить $P(x) dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$, где a, b — числа (можно принять $u = e^{ax}$); интегралы вида $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$, $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$, где a — число (следует положить $dv = dx$). В этих случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого выражается искомый интеграл.

3°. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, $\int \frac{(Mx + N)dx}{ax^2 + bx + c}$,

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $\int \frac{(Mx + N)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где a, b, c, M, N — числа, причем $a \neq 0$, $M \neq 0$ называются *интегралами, содержащими квадратный трехчлен*. Основной прием вычисления — выделение полного

квадрата: $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$. Затем делается под-

становка $x + \frac{b}{2a} = z$, после чего первый и третий интегралы приводятся к табличным, а второй и четвертый — к сумме двух табличных.

Задачи для решения на практическом занятии

8.3.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{(4x+3)dx}{(x-2)^2};$

2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-3};$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}};$

5) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}.$

8.3.2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x \cos x dx;$

2) $\int x \sin 2x dx;$

3) $\int (5x-1)3^{2x+1} dx;$

4) $\int x^4 \ln x dx;$

5) $\int \ln(x+2) dx;$

6) $\int \arcsin x dx;$

7) $\int x \arctg x dx;$

8) $\int e^{3x} \sin 5x dx;$

9) $\int \sqrt{x^2-4} dx;$

10) $\int \sin \ln x dx.$

8.3.3. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+6x+34};$

$$2) \int \frac{dx}{2x^2 + 2x - 5};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 5}};$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 40}};$$

$$5) \int \frac{(3x-1)dx}{x^2 - 4x + 3};$$

$$6) \int \frac{(7x+3)dx}{x^2 + x + 1};$$

$$7) \int \frac{xdx}{\sqrt{-2x^2 - 4x + 6}};$$

$$8) \int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}}.$$

Задачи для домашнего задания

8.3.4. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{(8x-6)dx}{(2x-1)^2};$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{x}-2};$$

$$3) \int \frac{xdx}{\sqrt{3x+2}};$$

$$4) \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x \ln x};$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}+3}.$$

8.3.5. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int x \sin x dx;$$

- 2) $\int x^2 \cos 3x dx;$
- 3) $\int (3x+2)^{-3x+4} dx;$
- 4) $\int x^2 \ln x dx;$
- 5) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$
- 6) $\int \arctg x dx;$
- 7) $\int 3^x \cos x dx;$
- 8) $\int x \arcsin x dx;$
- 9) $\int \sqrt{x^2+9} dx;$
- 10) $\int \cos \ln x dx.$

8.3.6. Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+20};$
- 2) $\int \frac{dx}{-x^2+6x+7};$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}};$
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}};$
- 5) $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17};$
- 6) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2};$
- 7) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}};$
- 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}.$

Ответы

$$8.3.1. 1) 4 \ln|x-2| - \frac{11}{x-2} + C;$$

$$2) \frac{2\sqrt{x-1}}{35} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C;$$

$$3) \sqrt{2x-1} + 3 \ln|\sqrt{2x-1} - 3| + C;$$

$$4) 3 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x} + 1| \right) + C;$$

$$5) \frac{4}{21} (3e^x - 4) \cdot \sqrt[4]{(e^x + 1)^3} + C.$$

$$8.3.2. 1) x \sin x + \cos x + C; 2) \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C;$$

$$3) \frac{3^{2x+1}}{2 \ln 3} \left(5x - 1 - \frac{5}{2 \ln 3} \right) + C; 4) \frac{x^5}{25} (5 \ln x - 1) + C;$$

$$5) (x+2) \ln(x+2) - x + C; 6) x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$7) \frac{\operatorname{arctg} x}{2} (x^2 + 1) - \frac{x}{2} + C; 8) \frac{e^{3x}}{34} (3 \sin 5x - 5 \cos 5x) + C;$$

$$9) \frac{x\sqrt{x^2-4} - 4 \ln|x + \sqrt{x^2-4}|}{2} + C;$$

$$10) \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C.$$

$$8.3.3. 1) \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{5} + C; 2) \frac{1}{2\sqrt{11}} \ln \left| \frac{2x+1-\sqrt{11}}{2x+1+\sqrt{11}} \right| + C;$$

$$3) \arcsin \frac{x+2}{3} + C; 4) \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+40}| + C;$$

$$5) \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+3| + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C;$$

$$6) \frac{7}{2} \ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$7) \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+1}{2} + C;$$

$$8) \frac{61}{16} \ln |8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}| - \frac{5}{4} \sqrt{4x^2+9x+1} + C.$$

$$8.3.4. 1) 2 \ln |2x-1| + \frac{1}{2x-1} + C;$$

$$2) 2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} + x + 4\sqrt{x} + 8 \ln |\sqrt{x}-2| \right) + C;$$

$$3) \frac{2}{9} \left(\frac{\sqrt{(3x+2)^3}}{3} - 2\sqrt{3x+2} \right) + C;$$

$$4) 2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} \right| + C;$$

$$5) \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{(9x-1)^2}}{2} - 3\sqrt[3]{9x-1} + 9 \ln |\sqrt[3]{9x-1}+3| \right) + C.$$

$$8.3.5. 1) \sin x - x \cos x + C; 2) \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C;$$

$$3) \frac{3^{-3x+4}}{-3 \ln 3} \left(3x+2 + \frac{1}{\ln 3} \right) + C; 4) \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C;$$

$$5) \frac{1+2 \ln x}{-4x^2} + C; 6) x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C;$$

$$7) \frac{3^x (\cos x \ln 3 + \sin x)}{1 + (\ln 3)^2} + C;$$

$$8) \frac{\arcsin x}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C;$$

$$9) \frac{x\sqrt{x^2+9} + 9 \ln |x + \sqrt{x^2+9}|}{2} + C;$$

$$10) \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x) + C.$$

$$\begin{aligned}
 8.3.6. \quad & 1) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{4} + C; \quad 2) \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x+1}{x-7} \right| + C; \quad 3) \arcsin(x-2) + C; \\
 & 4) \ln |x-2+\sqrt{x^2-4x+20}| + C; \\
 & 5) \frac{3}{8} \left(\ln |4x^2-4x+17| + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{4} \right) + C; \\
 & 6) \frac{\ln |x^2+2x+2|}{2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C; \\
 & 7) -\sqrt{3-2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{x+1}{2} + C; \\
 & 8) \frac{11}{6\sqrt{3}} \ln \left| x - \frac{11}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}} \right| + \frac{1}{3} \sqrt{3x^2 - 11x + 2} + C.
 \end{aligned}$$

8.4. Интегрирование рациональных дробей

1°. Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m ,

$Q_n(x)$ — многочлен степени n . Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P_m(x)$ меньше степени многочлена $Q_n(x)$, т. е. $m < n$; в противном случае, если $m \geq n$, рациональная дробь называется *неправильной*. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя деление числителя на знаменатель.

2°. Простейшими рациональными дробями I, II, III, IV типов называются правильные дроби следующего вида:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad k \geq 2, k \in \mathbb{N};$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D=p^2-4q<0;$$

$$\text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2, k \in N, D=p^2-4q<0,$$

где $A, a, M, N, p, q \in R$.

Всякую правильную рациональную дробь можно представить единственным образом в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей указанных четырех типов.

Замечание. В дальнейшем в рамках нашего курса мы будем рассматривать только такие рациональные дроби, которые можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первых трех типов.

3°. Алгоритм интегрирования рациональной дроби:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя деление числителя на знаменатель;

2) правильную рациональную дробь представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей;

3) найти значения неопределенных коэффициентов простейших дробей, представленных в сумме, используя или метод конкретных значений аргумента, или метод сравнения коэффициентов у одинаковых степеней x , или комбинацию этих методов;

4) найти интеграл от данной рациональной дроби, проинтегрировав полученную сумму простейших рациональных дробей, и многочлен, в случае, если рациональная дробь была неправильной.

Задачи для решения на практическом занятии

8.4.1. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{(36-6x)dx}{x^3-9x};$$

$$2) \int \frac{(x^5+x^4-8)dx}{x^3-4x};$$

$$3) \int \frac{(17x+6)dx}{x^3+x^2-6x};$$

$$4) \int \frac{16dx}{x^3 - 4x^2};$$

$$5) \int \frac{(16x - 8)dx}{x^3 + 2x^2 + x};$$

$$6) \int \frac{(50 - 20x)dx}{x^3 + 25x};$$

$$7) \int \frac{dx}{x^3 + 1};$$

$$8) \int \frac{(x^2 - 8x + 4)dx}{x^4 + 4x^2}.$$

Задачи для домашнего задания

8.4.2. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{(20 + 2x)dx}{x^3 - 4x};$$

$$2) \int \frac{(19x - 12)dx}{x^3 - x^2 - 6x};$$

$$3) \int \frac{(2x^2 + 41x - 91)dx}{x^3 - 2x^2 - 11x + 12};$$

$$4) \int \frac{(x^3 + 1)dx}{x^3 - x^2};$$

$$5) \int \frac{(10x - 12)dx}{x^3 - 4x^2 + 4x};$$

$$6) \int \frac{(32 + 16x)dx}{x^3 + 16x};$$

$$7) \int \frac{xdx}{x^3 - 1};$$

$$8) \int \frac{2x^3 dx}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}.$$

Ответы

$$8.4.1. 1) \ln \left| \frac{(x+3)^3(x-3)}{x^4} \right| + C;$$

$$2) \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C; 3) \ln \left| \frac{(x-2)^4}{x(x+3)^3} \right| + C;$$

$$4) \frac{4}{x} + \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| + C; 5) \frac{-24}{x+1} + 8 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + C;$$

$$6) \ln \frac{x^2}{x^2+25} - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C;$$

$$7) \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C; 8) \ln \frac{x^2+4}{x^2} - \frac{1}{x} + C.$$

$$8.4.2. 1) \ln \left| \frac{(x+2)^2(x-2)^3}{x^5} \right| + C; 2) \ln \left| \frac{x^2(x-3)^3}{(x+2)^5} \right| + C;$$

$$3) \ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C; 4) \frac{x^2+1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C;$$

$$5) \frac{-4}{x-2} + \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x^3} \right| + C; 6) \ln \frac{x^2}{x^2+16} + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C;$$

$$7) \frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$8) 2 \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} - \operatorname{arctg} x + C.$$

8.5. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$, где $R(\sin x; \cos x)$ — рациональная функция от переменных $\sin x$ и $\cos x$, приводятся с использованием универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

к интегралам вида $\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ — рациональная функция от переменной t :

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ всегда приводит к взятию интеграла, однако во многих случаях это сопряжено с очень громоздкими выкладками. В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$ может быть упрощено использованием других подстановок. Например, если функция $R(\sin x; \cos x)$ — четная функция относительно переменных $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

2°. Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^n x dx$, где n, m — действительные числа, вычисляются с использованием следующих приемов:

1) если n — целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\sin x = t$;

2) если m — целое положительное нечетное число, то применяется подстановка $\cos x = t$;

3) если m и n — целые положительные четные числа, то подынтегральная функция преобразуется с помощью формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

3°. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^n x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, где n — целое положительное число, вычисляются с использованием формул:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

4°. Интегралы вида $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$, $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$, $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$, где a, b — действительные числа, вычисляются с использованием формул:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Задачи для решения на практическом занятии

8.5.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{13 - 5 \cos x};$

2) $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5};$

3) $\int \frac{\sin x dx}{\sin x - 1};$

4) $\int \frac{dx}{1 + 8 \cos^2 x};$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x};$

6) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx;$

7) $\int \sin^3 x dx;$

8) $\int \cos^4 x dx;$

9) $\int \operatorname{tg}^3 x dx;$

10) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx;$

11) $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx.$

Задачи для домашнего задания

8.5.2. Найти неопределенные интегралы:

- 1) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;
- 2) $\int \frac{dx}{-4\sin x+3\cos x+5}$;
- 3) $\int \frac{\cos x dx}{\cos x+2}$;
- 4) $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$;
- 5) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$;
- 6) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;
- 7) $\int \sin^6 x dx$;
- 8) $\int \cos^5 x dx$;
- 9) $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx$;
- 10) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;
- 11) $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$.

Ответы

- 8.5.1. 1) $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$; 2) $\frac{-1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C$; 3) $x + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} + C$;
- 4) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{3} \right) + C$; 5) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 3} \right| + C$;
- 6) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{\sin^9 x}{9} + C$; 7) $\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$;
- 8) $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$; 9) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$;

$$10) x + \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C; \quad 11) -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$$

$$8.5.2. \quad 1) \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} \right) + C; \quad 2) \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C;$$

$$3) x - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + C; \quad 4) \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5} \operatorname{tg} x) + C;$$

$$5) \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{3} \right) + C; \quad 6) \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

$$7) \frac{\sin^3 2x}{48} + \frac{3 \sin 4x}{64} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{5x}{16} + C;$$

$$8) \sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C; \quad 9) \frac{\operatorname{ctg} 2x}{-2} - x + C;$$

$$10) \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C; \quad 11) \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$$

8.6. Интегрирование

иррациональных функций

$$1^0. \text{ Интегралы вида } \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_r}{n_r}} \right) dx, \text{ где } R —$$

рациональная функция, a, b, c, d — действительные числа, $m_1, n_1, \dots, m_r, n_r$ — натуральные числа, приводятся с использованием

подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s — наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_r$ к интегралам от рациональной функции, которая

зависит от переменной t . В частности, для интегралов вида

$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx$ используется подстановка $x = t^s$, где s — наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_r$, $dx = s \cdot t^{s-1} dt$.

2°. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, где a — действительное число ($a \neq 0$), приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от переменных $\sin x$ и $\cos x$, с помощью следующих *тригонометрических подстановок*:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx: x = a \sin t, \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, dx = a \cos t dt;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx: x = a \operatorname{tg} t, \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}, dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt;$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx: x = \frac{a}{\cos t}, \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a \sin t}{\cos t}, dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Задачи для решения на практическом занятии

8.6.1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}\sqrt{x}};$

2) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}};$

4) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x};$

5) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}};$

$$6) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 16}};$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}};$$

$$8) \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3} dx}{x^6}.$$

Задачи для домашнего задания

8.6.2. Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}};$$

$$2) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}};$$

$$4) \int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x};$$

$$5) \int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2};$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 25)^3}};$$

$$7) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 16}};$$

$$8) \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Ответы

$$8.6.1. 1) 4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln |\sqrt[4]{x} + 1| \right) + C;$$

$$2) x + 6 \left(\frac{\sqrt[5]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[5]{x} + \ln |\sqrt[5]{x} - 1| \right) + C;$$

$$3) 3 \left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2} + \sqrt[5]{2x+1} + \ln |\sqrt[5]{2x+1} - 1| \right) + C;$$

$$4) \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$$

$$5) 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C; 6) -\frac{\sqrt{16+x^2}}{16x} + C;$$

$$7) \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C; 8) -\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5} + C.$$

$$8.6.2. 1) 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[5]{x} + \ln |\sqrt[5]{x} - 1| \right) + C;$$

$$2) \frac{6}{5} \left(\sqrt[5]{x^5} + 2\sqrt[3]{x^5} + 2 \ln |\sqrt[3]{x^5} - 1| \right) + C;$$

$$3) 6 \left(\frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \sqrt[5]{x+1} - \ln(\sqrt[5]{x+1} + 1) \right) + C;$$

$$4) \ln \frac{|u^2 - 1|}{\sqrt{u^4 + u^2 + 1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2u^2}{\sqrt{3}} + C, \text{ где } u = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$5) -\arcsin x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C; 6) \frac{x}{25\sqrt{x^2+25}} + C;$$

$$7) -\frac{1}{4} \arcsin \frac{4}{|x|} + C; 8) 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x(x^2-2)\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$$

9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. Вычисление определенного интеграла

1°. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы σ , вычисленный при условии, что длина наибольшего из элементар-

ных отрезков стремится к нулю: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, где $\lambda = \max \{\Delta x_i\}$.

2°. *Теорема.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует.

3°. Основные свойства определенного интеграла:

$$1) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k — \text{константа};$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b f(x) dx \geq 0, \text{ если } f(x) \geq 0 \text{ при } x \in [a; b];$$

$$5) \int_a^b f_1(x) dx \geq \int_a^b f_2(x) dx, \text{ если } f_1(x) \geq f_2(x) \text{ при } x \in [a; b];$$

$$6) \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a), \text{ где } c \in [a; b].$$

4°. *Геометрический смысл определенного интеграла:*

если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции — плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

5°. *Механический смысл определенного интеграла:* если точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то путь S , пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, равен определенному интегралу от скорости: $S = \int_a^b v(x) dx$.

6°. *Вычисление определенного интеграла:*

1) *формула Ньютона-Лейбница:* $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ т. е. $F'(x) = f(x)$;

2) *формула интегрирования по частям:* $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$;

3) *формула замены переменной:* $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$, где $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $f(\varphi(t))$ — функция, непрерывная на $[\alpha; \beta]$;

4) если $f(x)$ — нечетная функция ($f(-x) = -f(x)$), то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$; если $f(x)$ — четная функция ($f(-x) = f(x)$), то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Задачи для решения на практическом занятии

9.1.1. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{aligned}
 &1) \int_1^9 \frac{x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int_0^{\pi/18} \frac{dx}{\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}; \quad 3) \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{6x^2 + 1}}; \\
 &4) \int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x - 9)}; \quad 5) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx; \quad 6) \int_0^{-1} \ln(x+1) dx; \\
 &7) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx; \quad 8) \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}; \quad 9) \int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}; \quad 10) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}; \\
 &11) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin x \cos^2 x dx; \quad 12) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1} dx}{x}; \quad 13) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 1}.
 \end{aligned}$$

Задачи для домашнего задания

9.1.2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{aligned}
 &1) \int_1^9 \frac{x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + 5x}{x^2} dx; \quad 2) \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}; \quad 3) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+4}; \\
 &4) \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{5+\cos^2 x}}; \quad 5) \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad 6) \int_1^e x^3 \ln x dx; \quad 7) \int_0^{\pi/2} e^{3x} \cos x dx; \\
 &8) \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}; \quad 9) \int_2^3 \frac{2dx}{x^3-x}; \quad 10) \int_{-0.5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}; \quad 11) \int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx; \\
 &12) \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^6}; \quad 13) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}.
 \end{aligned}$$

Ответы

9.1.1. 1) 40 ; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$; 5) $\frac{\pi}{2} - 1$; 6) 1 ; 7) π ;

$$8) 7 + 2 \ln 2; 9) \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}; 10) \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}; 11) 0; 12) \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}; 13) 2.$$

$$9.1.2. 1) \frac{4}{3} + 5 \ln 9; 2) \frac{4}{3}; 3) \frac{\pi}{16}; 4) \ln \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}; 5) 1 - \frac{2}{e}; 6) \frac{7e^8 + 1}{16};$$

$$7) \frac{e^{1.5\pi} - 3}{10}; 8) \frac{32}{3}; 9) \ln \frac{32}{27}; 10) \frac{\pi}{6}; 11) \frac{5}{24}; 12) \frac{8}{15};$$

$$13) \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

9.2. Вычисление несобственного интеграла

1°. Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

2°. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством: $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности — *расходящимся*.

Аналогично:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

3°. Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$ и непрерывна при $a \leq x < b$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ и непрерывна при $a < x \leq b$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$ и непрерывна при x , то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$.

9. Определенный интеграл и его приложения

Несобственные интегралы называются *сходящимися*, если пределы, стоящие в правых частях формул, существуют и конечны; в противном случае — несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Задачи для решения на практическом занятии

9.2.1. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

$$\begin{aligned} &1) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad 2) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{\ln(3x-1)dx}{3x-1}; \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(5x-3)^2}; \\ &5) \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} x \sin x dx; \quad 7) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \quad 8) \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}; \\ &9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}; \quad 10) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 11) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}; \quad 12) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}; \\ &13) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}; \quad 14) \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}; \quad 15) \int_0^1 x \ln x dx. \end{aligned}$$

Задачи для домашнего задания

9.2.2. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

$$\begin{aligned} &1) \int_e^{\infty} \frac{\ln^3 x dx}{x}; \quad 2) \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^3 x}}; \quad 3) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln x} dx}{x}; \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}; \\ &5) \int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^2} dx; \quad 6) \int_0^{\infty} x \cos 2x dx; \quad 7) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}; \quad 8) \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; \\ &9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}; \quad 10) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}; \quad 11) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}; \quad 12) \int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}; \\ &13) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}; \quad 14) \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-4x}; \quad 15) \int_0^1 x^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

Ответы

9.2.1. 1) 1; 2) расходится; 3) расходится; 4) 0,1; 5) -0,5;

6) расходится; 7) $1 - \ln 2$; 8) $\frac{\ln 3}{2}$; 9) π ; 10) $\frac{\pi}{2}$; 11) $\sqrt{3}$; 12) $\frac{8}{3}$;

13) $-\ln(2 - \sqrt{3})$; 14) расходится; 15) $\frac{-1}{4}$.

9.2.2. 1) расходится; 2) 2; 3) расходится; 4) расходится; 5) $\frac{1}{3}$;

6) расходится; 7) $\frac{\ln 2}{2}$; 8) $\frac{\pi}{4}$; 9) $\frac{\pi}{2}$; 10) $2\sqrt{2}$; 11) $-\ln(2 - \sqrt{3})$;

12) $\frac{-4}{3}$; 13) $\frac{\pi}{2}$; 14) расходится; 15) $\frac{-1}{9}$.

9.3. Вычисление площади плоской фигуры

1°. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox ,

вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x) dx$.

2°. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

3°. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , выражается

формулой $S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$, где α , β определяются из уравнений $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ ($y(t) \geq 0$ при $\alpha \leq t \leq \beta$).

4°. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя

9. Определенный интеграл и его приложения

полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Задачи для решения на практическом занятии

9.3.1. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями:

1) $y = (x-1)^2 + 1$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 7$, $y = 0$, $x = 0$;

3) $y = x^2 - 2$, $y = 2x + 6$;

4) $y \cdot x = 4$, $y + x - 5 = 0$;

5) $y^2 = x + 1$, $y^2 = 7 - x$.

9.3.2. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями, заданными параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 3t^2 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 3$; $x = 0$; 2) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t \\ y = 2 \sin^3 2t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t & y = 4 \\ y = 4\sqrt{2} \sin t & (y \geq 4) \end{cases}$.

9.3.3. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

1) $r = 2(1 + \cos \varphi)$;

2) $r = 2 \sin 2\varphi$;

3) $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$;

4) $r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Задачи для домашнего задания

9.3.4. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями:

1) $y = x^2 + 2$, $y = -x + 8$, $x = 0$, $y = 0$; 2) $y = x^2 - 1$, $y = -2x + 7$;

3) $y = x^2$, $x \cdot y = 8$, $x = 4$; 4) $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$;

5) $y^2 + 4x = 8$, $y^2 - x = 3$.

9.3.5. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями, заданными параметрическими уравнениями:

$$1) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi; y = 0; 2) \begin{cases} x = 4 \cos 2t \\ y = 3 \sin 2t \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t & x = 4 \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t & (x \geq 4) \end{cases}.$$

9.3.6. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:

$$1) r = 3(1 - \cos \varphi);$$

$$2) r = 2 \sin 3\varphi;$$

$$3) r = 2\sqrt{\sin \varphi};$$

$$4) r = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Ответы

$$9.3.1. 1) 6; 2) 17\frac{1}{6}; 3) 36; 4) 7,5 - 4 \ln 4; 5) 21\frac{1}{3}.$$

$$9.3.2. 1) 40,5; 2) 1,5\pi; 3) 2\pi - 4.$$

$$9.3.3. 1) 6\pi; 2) \pi; 3) 1; 4) 1,5\pi.$$

$$9.3.4. 1) 24\frac{2}{3}; 2) 36; 3) \frac{56}{3} - 8 \ln 2; 4) \pi - \frac{2}{3}; 5) 13\frac{1}{3}.$$

$$9.3.5. 1) 3\pi; 2) 12\pi; 3) 1,5\pi - 2.$$

$$9.3.6. 1) 13,5\pi; 2) \pi; 3) 4; 4) 1,5\pi.$$

9.4. Вычисление длины плоской кривой. Вычисление объема тела

1°. Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ — гладкая (т. е. производная y' непрерывна), то длина дуги этой кривой находится по

формуле:
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

9. Определенный интеграл и его приложения

2°. При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от α

до β , вычисляется по формуле: $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$.

3°. Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги равна $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$.

4°. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), вращается вокруг оси

Ox , то объем тела вращения вычисляется по формуле: $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$.

5°. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox , то

объем тела вращения вычисляется по формуле: $V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$.

6°. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ и прямыми линиями $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), вращается вокруг оси Oy ,

то объем тела вращения вычисляется по формуле: $V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$.

Задачи для решения на практическом занятии

9.4.1. Вычислить длины дуг кривых:

1) $y = 2\sqrt{x^3}$, $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$; 2) $y = 1 - \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$;

3) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$, $0 \leq t \leq 3$; 4) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \ln \pi$;

5) $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi$; 6) $r = 3 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$;

$$7) r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; 8) r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

9.4.2. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = (x-1)^2, y = 1;$$

$$2) y = 2x^2, y = x^3;$$

$$3) y = x^2, y = 12 - x, y = 0.$$

9.4.3. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

$$1) x \cdot y = 6, y = 1, y = 6, x = 0;$$

$$2) y = (x-1)^2, y = 0, x = 0, x = 2.$$

Задачи для домашнего задания

9.4.4. Вычислить длины дуг кривых:

$$1) y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}; 2) y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 2;$$

$$3) y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 4) \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$5) \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi; 6) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi;$$

$$7) r = 1 - \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi; 8) r = \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

9.4.5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = (x-2)^2, y = 9;$$

$$2) y = x^2, y = 3x;$$

$$3) y = x^2, y = 2 - x, y = 0.$$

9.4.6. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oy фигур, ограниченных линиями:

$$1) x \cdot y = 9, y = 1, y = 3, x = 0;$$

$$2) y = (x+2)^2, y = 0, x = 0, x = -4.$$

Ответы

9.4.1. 1) $\frac{52}{27}$; 2) $\ln \sqrt{3}$; 3) 12; 4) $\sqrt{2}(\pi - 1)$; 5) 8; 6) π ; 7) $4 - 2\sqrt{3}$;

$$8) \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2}.$$

9.4.2. 1) $1,6\pi$; 2) $\frac{256}{35}\pi$; 3) $291,6\pi$.

9.4.3. 1) 30π ; 2) $\frac{4\pi}{3}$.

9.4.4. 1) $1 + \ln \sqrt{1,5}$; 2) $\sqrt{5} + \ln \sqrt{2 + \sqrt{5}}$; 3) $\ln \sqrt{3}$; 4) 1,5; 5) 4;

$$6) 0,5\pi^2; 7) 4; 8) \frac{8 - 5\sqrt{2}}{3}.$$

9.4.5. 1) $\frac{1944}{5}\pi$; 2) $32,4\pi$; 3) $\frac{8}{15}\pi$.

9.4.6. 1) 54π ; 2) $\frac{64\pi}{3}$.

9.5. Статические моменты и моменты инерции. Масса пластины. Координаты центра тяжести

1°. Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), имеющей плотность $\rho = \rho(x)$, вычисляются по формулам:

$$M_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + (y')^2} dx;$$

$$I_x = \int_a^b \rho y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

где M_x, M_y — статические моменты плоской кривой относительно осей Ox и Oy ; I_x, I_y — моменты инерции плоской кривой относительно осей Ox и Oy .

2°. Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), имеющей плотность $\rho = \rho(x)$, вычисляются по формулам:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho y^2 dx; \quad M_y = \int_a^b \rho x y dx;$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \rho y^3 dx; \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx,$$

где M_x, M_y — статические моменты криволинейной трапеции относительно осей Ox, Oy ; I_x, I_y — моменты инерции криволинейной трапеции относительно осей Ox, Oy .

3°. Статические моменты и моменты инерции фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), имеющей плотность $\rho = \rho(x)$, находятся по формулам:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x (f_2(x) - f_1(x)) dx;$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \rho (f_2^3(x) - f_1^3(x)) dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

4°. Координаты центра тяжести $C(x_c; y_c)$ дуги плоской кривой и плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

где M_x, M_y — статические моменты дуги плоской кривой или плоской фигуры; $m = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (y')^2} dx$ — масса дуги плоской кривой;

$m = \int_a^b \rho y dx$ — масса плоской фигуры.

Задачи для решения на практическом занятии

9.5.1. Найти массу пластины с поверхностной плотностью $\rho(x) = 5x$, которая ограничена линиями $x \cdot y = 4$, $y = 0,25x$, $x = 6$.

9.5.2. Вычислить статический момент и момент инерции однородной полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ относительно оси Ox ($\rho = 1$).

9.5.3. Вычислить статический момент и момент инерции однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, $x \geq 0$, относительно оси Oy ($\rho = 1$).

9.5.4. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ и осью Ox .

9.5.5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной эллипсом $4x^2 + 9y^2 = 36$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$ и расположенной в первой четверти.

Задачи для домашнего задания

9.5.6. Найти массу пластины с поверхностной плотностью $\rho(x) = 3x$, которая ограничена линиями $x \cdot y = 8$, $y = 2x$, $x = 6$.

9.5.7. Вычислить статический момент и момент инерции однородной дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$, $y \geq 0$ относительно оси Oy ($\rho = 1$).

9.5.8. Вычислить статический момент и момент инерции однородной плоской фигуры, ограниченной эллипсом $x^2 + 9y^2 = 9$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$, относительно оси Ox ($\rho = 1$).

9.5.9. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной прямыми $3x + 2y = 6$, $x = 0$, $y = 0$.

9.5.10. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 0,5x^2$, $y = 4 - x$.

Ответы

9.5.1. $23\frac{1}{3}$.

9.5.2. $M_x = 8$, $I_x = 4\pi$.

9.5.3. $M_y = 4$, $I_y = \frac{64}{15}$.

$$9.5.4. C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right).$$

$$9.5.5. C\left(\frac{4}{\pi}; \frac{20}{3\pi}\right).$$

$$9.5.6. 320.$$

$$9.5.7. M_y = 76,8, I_y = 384.$$

$$9.5.8. M_x = 16, I_x = \frac{39}{4}\pi.$$

$$9.5.9. C\left(\frac{2}{3}; 1\right).$$

$$9.5.10. C(-1; 3, 2).$$

9.6. Вычисление пройденного пути, работы и давления

1°. Если материальная точка движется прямолинейно и ее скорость задается функцией $v = v(t)$ ($t \in [a; b]$), то *путь*, пройденный материальной точкой, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b v(t) dt$.

2°. *Работа* переменной силы $F(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле: $A = \int_a^b F(x) dx$.

3°. Для вычисления *величины давления* жидкости плотности ρ на площадку площади S , расположенную на глубине h , используют закон Паскаля $P = \rho ghS$ ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести).

Задачи для решения на практическом занятии

9.6.1. Скорость материальной точки, которая движется прямолинейно, изменяется по закону $v(t) = 4(6 - 3t) \text{ м/с}$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до его остановки.

9.6.2. Скорость первой материальной точки изменяется по закону $v(t) = (4t + 5) \text{ м/с}$, а второй — $v(t) = (6t^2 + 2t) \text{ м/с}$. Какое рас-

9. Определенный интеграл и его приложения

стояние будет между ними через 5 секунд после начала движения, если они начали свое прямолинейное движение одновременно из одной точки в одном направлении?

9.6.3. Вычислить работу, которую следует произвести для сжатия пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужно приложить силу 20 Н.

9.6.4. Для растяжения пружины на 0,02 м необходимо совершить работу в 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 80 Дж?

9.6.5. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 4 м заполнен водой. Вычислить работу, которую надо выполнить, чтобы выкачать воду из резервуара.

9.6.6. Вычислить работу, которую необходимо выполнить для выкачивания воды из ямы, имеющей форму конуса (с вершиной на дне), если его высота равна 1 м, а радиус основания — 2 м.

9.6.7. Найти величину давления воды на вертикальную заслонку, имеющую форму параболического сегмента, если известно, что его основание равно 6 м и расположено на поверхности воды, а его самая низкая точка является вершиной параболы и находится на глубине 9 м.

Задачи для домашнего задания

9.6.8. Скорость материальной точки, которая движется прямолинейно, изменяется по закону $v(t) = 6(4 - t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

9.6.9. Скорость первой материальной точки изменяется по закону $v(t) = (10t + 8)$ м/с, а второй — $v(t) = (3t^2 + 6t)$ м/с. Через сколько секунд после начала движения одна точка догонит другую, если они начали свое прямолинейное движение одновременно из одной точки в одном направлении?

9.6.10. Вычислить работу, которую следует произвести для растяжения пружины на 0,08 м, если для растяжения ее на 0,02 м нужно приложить силу 20 Н.

9.6.11. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 40 Н растягивает ее на 0,004 м. Вычислить работу, которую следует произвести, чтобы растянуть ее от длины 0,24 м до длины 0,28 м.

Практические занятия по математике: теория, задания, ответы

9.6.12. Резервуар, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с высотой 4 м и сторонами основания, равными 2 м, заполнен водой. Вычислить работу, которую надо выполнить, чтобы выкачать воду из резервуара.

9.6.13. Вычислить работу, которую необходимо затратить для выкачивания воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого 9 м, а радиус — 2 м.

9.6.14. Найти величину давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму равнобедренной трапеции, если известно, что ее верхнее основание равно 6 м и расположено на поверхности воды, а нижнее основание и высота соответственно равны 4 м и 3 м.

Ответы

9.6.1. 24 м.

9.6.2. 200 м.

9.6.3. 1,6 Дж.

9.6.4. 0,04 м.

9.6.5. 32g кДж.

9.6.6. $\frac{\pi g}{3}$ кДж.

9.6.7. 129,6g кН.

9.6.8. 48 м.

9.6.9. 4 с.

9.6.10. 3,2 Дж.

9.6.11. 24 Дж.

9.6.12. 32g кДж.

9.6.13. 48g кДж.

9.6.14. 21g кДж.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка: определение, основные понятия и теоремы.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные дифференциальные уравнения.

Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.

Приводящиеся к однородным
(два практических занятия)

1°. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$. В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x; y; y'; \dots; y^{(n)}) = 0$. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

2°. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производную y' . В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде $F(x; y; y') = 0$. Если это уравнение можно разрешить относительно производной, то его записывают в виде $y' = f(x; y)$ и называют дифференциальным уравнением, *разрешенным относительно производной*. Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*: $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$, где $P(x; y)$, $Q(x; y)$ — известные функции.

3°. *Решением* дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение вместо искомой функции обращает его в верное равенство. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x; C)$, удовлетворяющая условиям: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C , принадлежащих некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0; y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию. Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ найдено в неявном виде $\Phi(x; y; C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$. Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ найдено в неявном виде $\Phi(x; y; C_0) = 0$, то такое решение называется *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Задача нахождения частного решения уравнения $y' = f(x; y)$, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Теорема Коши. Если в уравнении $y' = f(x; y)$ функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

4°. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y) dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y) dy = 0,$$

где $f_1(x), \varphi_1(y), f_2(x), \varphi_2(y)$ — известные функции, причем ни одна из них тождественно не равна нулю, называется *уравнением с разде-*

10. Дифференциальные уравнения

ляющимися переменными. Для решения этого уравнения следует разделить его на произведение $f_2(x) \cdot \varphi_1(y) \neq 0$, привести к уравнению $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy = 0$, которое почленно проинтегрировать.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x; y)$, где $f(x; y)$ — однородная функция нулевого порядка ($f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^0 \cdot f(x; y)$), называется *однородным*. Для решения этого уравнения следует привести его к виду $y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, затем сделать замену $y = u \cdot x$ и решить полученное уравнение $u'x + u = \Phi(u)$ как уравнение с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ называется *уравнением, приводящимся к однородному*. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то это уравнение приводится к однородному заменой $x = u + k$, $y = v + p$, где $(k; p)$ решение системы $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$; если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $a_1x + b_1y = u$.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — известные функции, называется *линейным уравнением*. Его решение ищется в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две неизвестные функции. После подстановки в данное уравнение выражений $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ получается уравнение $vu' + (v' + P(x)v)u = Q(x)$. В качестве $v(x)$ выбирается одна из функций, удовлетворяющая уравнению $v' + P(x)v = 0$, после чего функция $u(x)$ определяется как общее решение уравнения $vu' = Q(x)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $P(x)$, $Q(x)$ — известные функции, а $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Заменой $z = y^{1-n}$ оно приводится к линейному; кроме того, его можно решать непосредственно заменой $y = uv$.

Задачи для решения на практическом занятии

10.1.1. Определить порядок дифференциальных уравнений:

1) $y' + xy = x^2$;

2) $y' - y = y^3$;

3) $y'' - 2y' = x^3$;

4) $y^2 dx = dy$;

5) $y'' - y'' = y^4$.

10.1.2. Выяснить, при каких значениях k данные функции y являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

1) $xy' = ky$, $y = 7x^4$;

2) $ky' - y = 15e^{2x}$, $y = 5e^{2x}$;

3) $yy' = kx$, $y^2 = 2x^2 + 4$.

10.1.3. Убедиться, что функция $y = (x^2 + C)x^2$ является общим решением уравнения $y'x - 2y = 2x^4$ и найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 3$.

10.1.4. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $y^{-2} dy = x dx$;

2) $\sqrt{x^2 + 3} dy - (y^2 + 9) dx = 0$;

3) $y' \cdot e^{2y} = \operatorname{tg} x$;

4) $2dx + ydy = yx^2 dy - y^2 dx$;

5) $xy' - y = y^2$;

6) $yy' = e^{x-y^2}$.

10.1.5. Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$;

2) $xy' \ln \frac{y}{x} = y \ln \frac{y}{x} - x$;

3) $y' = \frac{x+5y}{5x-y}$;

4) $y' = \frac{3xy + y^2}{2x^2 + xy}$;

10. Дифференциальные уравнения

$$5) y' = \frac{5x^2 + 5xy + y^2}{x^2};$$

$$6) y' = \frac{4\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}.$$

10.1.6. Решить линейные дифференциальные уравнения:

$$1) y' - \frac{y}{x+3} = (x+3) \cos 3x;$$

$$2) y' - \frac{2y}{x-1} = (x-1)^2 e^{5x};$$

$$3) y' + \frac{y}{x+1} = \frac{\sin 6x}{x+1};$$

$$4) y' + y \operatorname{tg} x = x \cos^2 x;$$

$$5) y^2 dx + (xy - 1) dy = 0;$$

$$6) (\cos^2 y - x) y' = \sin y \cos y.$$

10.1.7. Решить дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным:

$$1) y' = \frac{3y + 2x + 1}{3x - 3};$$

$$2) (2x - y + 4) dy + (x - 2y + 5) dx = 0.$$

10.1.8. Решить уравнения Бернулли:

$$1) y' + \frac{y}{x} = -xy^2;$$

$$2) 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4;$$

$$3) 3y' + 2xy = e^{-2x^3} 2xy^{-2}.$$

10.1.9. Решить задачи Коши:

$$1) y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}, \quad y(1) = 0;$$

$$2) xy' = y(\ln y - \ln x), \quad y(1) = 1;$$

$$3) 2y' + y \cos x = \cos x(1 + \sin x) y^{-1}, \quad y(0) = 1;$$

$$4) dx = (y^3 - xy) dy, \quad y(0) = 0.$$

Задачи для домашнего задания

10.1.10. Определить порядок дифференциальных уравнений:

1) $y' - 5y = x^2$;

2) $y' = y^2 x$;

3) $y'' - 2y' = x^3$;

4) $d^2 y = dx^2$;

5) $y'' - y' = y^5$.

10.1.11. Выяснить, при каких значениях k данные функции y являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = 4$, $y = 2kx + 3$;

2) $y' = (2k + 2)x^3$, $y = x^4$;

3) $y^3 y' = kx^2$, $y^4 = 8x^3$.

10.1.12. Убедиться, что функция $y = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\cos x}$ является общим решением уравнения $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ и найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

10.1.13. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $y^2 dy = e^{4x} dx$;

2) $\sqrt{4 - x^2} dy + (9 - y^2) dx = 0$;

3) $y' \cdot \cos^2 x = \operatorname{tg} y$;

4) $9x dx + 4dy = x^2 dy - xy^2 dx$;

5) $2xy' + y = y^3$;

6) $y' + \sin(x - y) = \sin(x + y)$.

10.1.14. Решить однородные дифференциальные уравнения:

1) $y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$;

2) $xy' = y \ln \frac{y}{x} - 2y$;

3) $y' = \frac{x + 3y}{3x - y}$;

4) $y' = \frac{4x^2 + 5xy + y^2}{x^2}$;

10. Дифференциальные уравнения

$$5) y' = \frac{4x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy};$$

$$6) y' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2x + 5x^3};$$

$$7) y' = \frac{\sqrt{4x^2 + y^2} + y}{x}.$$

10.1.15. Решить линейные дифференциальные уравнения:

$$1) y' - \frac{y}{x-2} = (x-2)\sin 5x;$$

$$2) y' - \frac{3y}{x+1} = \frac{(x+1)^3}{\sin^2 4x};$$

$$3) y' + \frac{2y}{x-3} = \frac{e^{-2x}}{(x-3)^2};$$

$$4) y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x;$$

$$5) 4y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{2y}}) dy = 0;$$

$$6) \cos y = \sin y(x+1)y'.$$

10.1.16. Решить дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным:

$$1) y' = \frac{2y - x - 3}{y + 1};$$

$$2) (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

10.1.17. Решить уравнения Бернулли:

$$1) y' - y = xy^2;$$

$$2) y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x;$$

$$3) 2y' - \frac{2x-5}{x^2} y = \frac{5}{y}.$$

10.1.18. Решить задачи Коши:

$$1) y' + y = 4e^{3x}, y(0) = 2;$$

$$2) xy' = y + 2\sqrt{xy}, y(1) = 0;$$

$$3) 2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, y(0) = 2;$$

$$4) y = (2y^3 + x)y', y(2) = 1.$$

Ответы

10.1.1. 1) гервый; 2) первый; 3) второй; 4) первый; 5) третий.

10.1.2. 1) 4; 2) 2; 3) 2.

$$10.1.3. y = x^4 + 2x^2.$$

$$10.1.4. 1) \frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + C; 2) \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{3} + C;$$

$$3) \frac{e^{2x}}{2} = \ln \left| \frac{C}{\cos x} \right|; 4) \frac{x-1}{x+1} = C(y^2 + 2); 5) \frac{y}{y+1} = Cx;$$

$$6) e^{x^2} = 2e^x + C.$$

$$10.1.5. 1) \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln |Cx|; 2) \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

$$3) 5 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |C \sqrt{x^2 + y^2}|; 4) \frac{y}{x} = \ln \left| C \frac{x^3}{y^2} \right|;$$

$$5) \operatorname{arctg} \frac{y+2x}{x} = \ln |Cx|; 6) \arcsin \frac{y}{x} = \ln |Cx^4|.$$

$$10.1.6. 1) y = (x+3) \left(\frac{\sin 3x}{3} + C \right); 2) y = (x-1)^2 \left(\frac{e^{5x}}{5} + C \right);$$

$$3) y = \frac{1}{x+1} \left(-\frac{\cos 6x}{6} + C \right);$$

$$4) y = \cos x (x \sin x + \cos x + C);$$

$$5) x = \frac{1}{y} (\ln y + C), y = 0;$$

$$6) x = \operatorname{ctgy} (y + C), y = 0, 5\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10.1.7. 1) \frac{y+1}{x-1} = \frac{2}{3} \ln |C(x-1)|; 2) y - x - 3 = C(y+x-1)^3.$$

10.1.8. 1) $y = \frac{1}{x^2 + Cx}$, $y = 0$; 2) $\frac{1}{y^3} = x - 1 + Cx^5$, $y = 0$;

3) $y^3 = -e^{-2x^2} + Ce^{-x^2}$.

10.1.9. 1) $y = \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x}$; 2) $\ln \left| \frac{y}{x} \right| = -x + 1$; 3) $y^2 = \sin x + e^{-\sin x}$;

4) $x = y^2 - 2 + 2e^{-0.5y^2}$.

10.1.10. 1) гервый; 2) первый; 3) второй; 4) второй; 5) третий.

10.1.11. 1) 2; 2) 1; 3) 6.

10.1.12. $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

10.1.13. 1) $\frac{y^3}{3} = \frac{e^{4x}}{4} + C$; 2) $\arcsin \frac{x}{2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{y-3}{y+3} \right| + C$;

3) $\operatorname{tg} x = \ln |C \sin y|$; 4) $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{y}{3} + C$;

5) $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Cx$; 6) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = 2 \sin x + C$.

10.1.14. 1) $e^{\frac{y}{x}} = \ln |Cx|$; 2) $\ln \frac{y}{x} = Cx + 3$;

3) $3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |C \sqrt{x^2 + y^2}|$; 4) $\frac{-x}{y + 2x} = \ln |Cx|$;

5) $\operatorname{arctg} \frac{y}{2x} = \ln \left| Cx \left(\frac{y^2}{x^2} + 4 \right) \right|$; 6) $\frac{y^5}{x^5} = Cx \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right)^{1.5}$;

7) $Cx^2 - y = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

10.1.15. 1) $y = (x-2) \left(C - \frac{\cos 5x}{5} \right)$; 2) $y = (x+1)^3 \left(C - \frac{\operatorname{ctg} 4x}{4} \right)$;

3) $y = \frac{1}{(x-3)^2} \left(C - \frac{e^{-2x}}{2} \right)$; 4) $y = \operatorname{tg} x - 1 + \frac{C}{e^{\operatorname{tg} x}}$;

5) $x = e^{\frac{1}{2y}} + Ce^{\frac{1}{4y}}$;

6) $x = \frac{C}{\cos y} - 1$, $C \neq 0$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$10.1.16. 1) \frac{x+5}{y-x-4} = \ln|C(y-x-4)|; 2) x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$$

$$10.1.17. 1) \frac{1}{y} = \frac{C}{e^x} - x + 1, y = 0; 2) \frac{1}{y^3} = \cos x + C \cos^3 x, y = 0;$$

$$3) y^2 = x^2(1 + Ce^{\frac{5}{x}}).$$

$$10.1.18. 1) y = e^{3x} + e^{-x}; 2) y = x \ln^2 x; 3) y^2 = e^{2x} + 3e^{-3 \sin x};$$

$$4) x = y^3 + y.$$

10.2. Дифференциальные уравнения второго порядка: определение, основные понятия и теоремы. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1°. Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные y' и y'' . В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде $F(x; y; y'; y'') = 0$. Если это уравнение можно разрешить относительно второй производной y'' , то его записывают в виде $y'' = f(x; y; y')$ и называют дифференциальным уравнением второго порядка, разрешенным относительно второй производной.

2°. Решением дифференциального уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение вместо искомой функции обращает его в верное равенство.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x; y; y')$ называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, удовлетворяющая условиям: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 , принадлежащих некоторому множеству; 2) для любых начальных

10. Дифференциальные уравнения

условий, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, существуют единственные значения $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, при которых решение $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0)$ удовлетворяет заданным начальным условиям. Если общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x; y; y')$ найдено в неявном виде $\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка $y'' = f(x; y; y')$ найдено в неявном виде $\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0) = 0$, то такое решение называется *частным интегралом* дифференциального уравнения.

Теорема Коши. Если в уравнении $y'' = f(x; y; y')$ функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $f'_x(x; y; y')$ и $f'_{y'}(x; y; y')$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0; y'_0)$, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

3°. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка:

1) уравнение $y'' = f(x)$, которое не содержит явно искомую функцию y и ее производную y' ; замена $y' = z(x)$, $y'' = z'$ превращает данное уравнение в дифференциальное уравнение первого порядка $z' = f(x)$, которое решается как уравнение с разделяющимися переменными;

2) уравнение $y'' = f(x; y')$, которое не содержит явно искомую функцию y ; замена $y' = z(x)$, $y'' = z'$ превращает данное уравнение в дифференциальное уравнение первого порядка $z' = f(x; z)$ одного из типов, рассмотренных ранее;

3) уравнение $y'' = f(y; y')$, которое не содержит явно независимую переменную x ; замена $y' = z(y)$, $y'' = z \frac{dz}{dy}$ превращает данное уравнение в дифференциальное уравнение первого порядка

$z \frac{dz}{dy} = f(y; z)$ одного из типов, рассмотренных ранее.

Задачи для решения на практическом занятии

10.2.1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' = 12x^2$;

2) $y'' = 8 \sin 2x$;

3) $y'' = x \cos 3x$;

4) $y'' = \ln x$.

10.2.2. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 2$;

2) $y'' - \frac{y'}{x} = 15x^3$;

3) $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$.

10.2.3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $yy'' = (y')^2 + 4$;

2) $(y')^2 = y'$;

3) $yy'' + (y')^2 = 2$.

10.2.4. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $y''(x^2 + 9) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 27$;

2) $e^{-2x}y'' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задачи для домашнего задания

10.2.5. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' = 20x^3$;

2) $y'' = 9 \cos 3x$;

3) $y'' = xe^{2x}$;

4) $y'' = x^2 \ln x$.

10.2.6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y''(e^x + 1) = y'e^x$;

2) $y'' + \frac{2y'}{x} = 30x^3$;

3) $y'' = \frac{y'}{x} + \sin\left(\frac{y'}{x}\right)$.

10. Дифференциальные уравнения

10.2.7. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $2yy'' = (y')^2$;

2) $2y'' = (y')^2 + 1$;

3) $yy'' - (y')^2 = y^2$.

10.2.8. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $y''(x+1) = 2y'$, $y(1) = 8$, $y'(1) = 12$;

2) $y''\sqrt{y} = y'$, $y(2) = 4$, $y'(2) = 4$.

Ответы

10.2.1. 1) $y = x^4 + C_1x + C_2$; 2) $y = -2\sin 2x + C_1x + C_2$;

3) $y = -\frac{1}{9}x\cos 3x + \frac{2}{27}\sin 3x + C_1x + C_2$;

4) $y = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2$.

10.2.2. 1) $y = C_2 - 2x - C_1 \cos x$; 2) $y = x^5 + C_1x^2 + C_2$;

3) $y = e^{C_1x+1} \left(\frac{C_1x-1}{C_1^2} \right) + C_2$.

10.2.3. 1) $\frac{\ln |C_1y + \sqrt{C_1^2y^2 - 4}|}{C_1} = x + C_2$; 2) $y = \frac{(x+C_1)^3}{12} + C_2$;

3) $\frac{y^2}{2} = x^2 + C_1x + C_2$.

10.2.4. 1) $y = x^3 + 27x + 1$; 2) $y = -\ln |1-x|$.

10.2.5. 1) $y = x^3 + C_1x + C_2$; 2) $y = -\cos 3x + C_1x + C_2$;

3) $y = \frac{1}{4}(x-1)e^{2x} + C_1x + C_2$;

4) $y = \frac{x^4}{144}(12\ln x - 7) + C_1x + C_2$.

$$10.2.6. 1) y = C_2 + C_1(x + e^x); 2) y = x^5 - C_1 x^{-1} + C_2;$$

$$3) y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2} \right) \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + C_2.$$

$$10.2.7. 1) y = (C_1 x + C_2)^2; 2) y = -2 \ln \left| \cos \left(\frac{x + C_1}{2} \right) \right| + C_2;$$

$$3) y = e^{\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}.$$

$$10.2.8. 1) y = (x + 1)^3; 2) y = x^2.$$

10.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (два практических занятия)

1°. Дифференциальное уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где p, q — действительные числа, $f(x)$ — известная функция, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение $y'' + py' + qy = 0$ называется *однородным*; в противном случае при $f(x) \neq 0$ уравнение называется *неоднородным*.

2°. Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ (1) называется соответствующим *характеристическим уравнением* для однородного линейного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$. Вид общего решения $\bar{y}$ этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от решения характеристического уравнения (1):

1) если $D = p^2 - 4q > 0$, то характеристическое уравнение (1) имеет два различных действительных корня $k_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$,

$k_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$, а общее решение будет иметь вид: $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

10. Дифференциальные уравнения

2) если $D = p^2 - 4q = 0$, то характеристическое уравнение (1) имеет два равных действительных корня $k_1 = k_2 = k = \frac{-p}{2}$, а общее решение будет иметь вид: $\bar{y} = (C_1 + xC_2)e^{kx}$;

3) если $D = p^2 - 4q < 0$, то характеристическое уравнение (1) не имеет действительных корней, а общее решение будет иметь вид:

$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где $\alpha = \frac{-p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$, а $\alpha \pm \beta i$ — комплексные корни характеристического уравнения (1).

3°. Общее решение y линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ равно $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, $y'' + py' + qy = 0$, а y^* — любое частное решение данного неоднородного уравнения. Если правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — известные многочлены степеней n и m соответственно, то частное решение y^* этого уравнения следует искать в виде: $y^* = x^r e^{\alpha x} (M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x)$, где r — число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения (1), $l = \max \{n; m\}$, $M_l(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l$, $N_l(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_l x^l$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами $A_0, A_1, \dots, A_l$, $B_0, B_1, \dots, B_l$, которые следует определить, подставив y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$, в данное линейное неоднородное уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$. В частности, если $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, то $y^* = x^r e^{\alpha x} M_n(x)$, где r — число, показывающее, сколько раз α встречается среди корней характеристического уравнения (1), а $M_n(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$; если $f(x) = C \cos \beta x$ или $f(x) = C \sin \beta x$, где C — известная константа, то $y^* = A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x$, если βi не является корнем характеристического уравнения (1), а A_0, B_0 — неопределенные коэффициенты.

Задачи для решения на практическом занятии

10.3.1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' + y' - 6y = 0$;
- 2) $y'' - 2y' = 0$;
- 3) $y'' - 4y = 0$;
- 4) $2y'' - 5y' + 3y = 0$;
- 5) $y'' - 2y' + y = 0$;
- 6) $4y'' + 4y' + y = 0$;
- 7) $y'' + 4y = 0$;
- 8) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

10.3.2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

- 1) $3y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -4$;
- 2) $y'' - 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

10.3.3. Определить вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

- 1) x ;
- 2) x^2 ;
- 3) $4e^{2x}$;
- 4) $4e^x$;
- 5) xe^{3x} ;
- 6) xe^{4x} ;
- 7) $2\cos x$;
- 8) $3e^x \sin 4x$.

10.3.4. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' + y' - 2y = 8e^{2x}$;
- 2) $y'' - 2y' + 5y = 5x + 8$;
- 3) $y'' + 4y' + 4y = 8\sin 2x$;
- 4) $y'' - 4y' = 12x^2 - 6x + 8$;
- 5) $y'' - 6y' + 9y = 8e^{3x}$;
- 6) $y'' - y' - 6y = 50\cos x$;
- 7) $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{4x}$;
- 8) $y'' - 2y' = 12xe^{2x}$;
- 9) $y'' + y = 2x^2e^x$.

Задачи для домашнего задания

10.3.5. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
- 2) $y'' + 3y' = 0$;
- 3) $y'' - 9y = 0$;
- 4) $2y'' + y' - 10y = 0$;
- 5) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
- 6) $16y'' - 8y' + y = 0$;
- 7) $y'' + y = 0$;
- 8) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

10.3.6. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

- 1) $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$;
- 2) $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 9$.

10.3.7. Определить вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

- 1) 2;
- 2) x ;
- 3) x^2 ;
- 4) $4e^{2x}$;
- 5) $x^2 e^{3x}$;
- 6) $x^2 e^{2x}$;
- 7) $7 \sin 2x$;
- 8) $5e^{2x} \cos 2x$.

10.3.8. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

- 1) $y'' + 4y' + 5y = 3e^{-2x}$;
- 2) $y'' - 2y' + y = 2x^2$;
- 3) $y'' - 4y' = -64 \cos 4x$;
- 4) $y'' + 3y' = 6x + 8$;
- 5) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$;
- 6) $y'' + 2y' + 2y = \cos x - 3 \sin x$;
- 7) $y'' - 6y' + 8y = (30x - 1)e^{-x}$;
- 8) $y'' - y = -5e^x \sin x$;
- 9) $y'' - y' = 3x^2 e^x$.

Ответы

- 10.3.1.** 1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$; 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2$;
 3) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{1.5x}$;
 5) $y = (C_1 + xC_2)e^x$; 6) $y = (C_1 + xC_2)e^{-0.5x}$;
 7) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$;
 8) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
- 10.3.2.** 1) $y = 4e^{-2x} + 3e^{4/3}$; 2) $y = e^{2x}(\cos 5x - \sin 5x)$.
- 10.3.3.** 1) $y' = A_0 + A_1 x$; 2) $y' = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$; 3) $y' = A_0 e^{2x}$;
 4) $y' = A_0 x e^x$; 5) $y' = (A_0 + A_1 x)e^{3x}$;
 6) $y' = (A_0 x + A_1 x^2)e^{4x}$; 7) $y' = A \cos x + B \sin x$;
 8) $y' = e^x(A \cos 4x + B \sin 4x)$.
- 10.3.4.** 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 2e^{2x}$;
 2) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + x + 2$;
 3) $y = (C_1 + xC_2)e^{-2x} - \cos 2x$; 4) $y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^3 - 2x$;
 5) $y = (C_1 + xC_2)e^{3x} + 4x^2 e^{3x}$;
 6) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - 7 \cos x - \sin x$;
 7) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (2x - 3)e^{4x}$;
 8) $y = C_1 e^{2x} + C_2 + (3x^2 - 3x)e^{2x}$;
 9) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 - 2x + 1)e^x$.
- 10.3.5.** 1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$; 2) $y = C_1 e^{-3x} + C_2$;
 3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$; 4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2.5x}$;
 5) $y = (C_1 + xC_2)e^{-3x}$; 6) $y = (C_1 + xC_2)e^{0.25x}$;
 7) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; 8) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.
- 10.3.6.** 1) $y = e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$; 2) $y = (x - 2)e^{-4x}$.
- 10.3.7.** 1) $y' = A_0 x$; 2) $y' = A_0 x + A_1 x^2$;
 3) $y' = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$; 4) $y' = A_0 x e^{2x}$;
 5) $y' = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)e^{3x}$;
 6) $y' = (A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3)e^{2x}$; 7) $y' = A \cos 2x + B \sin 2x$;
 8) $y' = e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$.
- 10.3.8.** 1) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-2x}$;
 2) $y = (C_1 + xC_2)e^x + 2x^2 + 8x + 12$;
 3) $y = C_1 e^{4x} + C_2 + 2 \cos 4x + 2 \sin 4x$;
 4) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x^2 + 2x$;
 5) $y = (C_1 + xC_2)e^{2x} + 3x^2 e^{2x}$;
 6) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 1,4 \cos x - 0,2 \sin x$;

- 7) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + (2x+1)e^{-x}$;
 8) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^x (2 \cos x + \sin x)$;
 9) $y = C_1 + C_2 e^x + (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x$.

10.4. Текстовые задачи на составление дифференциальных уравнений

При решении задач на составление дифференциальных уравнений полезно использовать следующие уравнения и законы.

1°. Геометрические задачи:

а) уравнение касательной имеет вид $Y - y = y'(X - x)$, где x, y — абсцисса и ордината точки касания (произвольной точки графика неизвестной функции $y = y(x)$, в которой проведена касательная); y' — угловой коэффициент касательной; X, Y — абсцисса и ордината произвольной точки графика касательной;

б) уравнение нормали имеет вид $Y - y = \frac{-1}{y'}(X - x)$, где x, y — абсцисса и ордината произвольной точки графика неизвестной функции $y = y(x)$, в которой проведена нормаль; $\frac{-1}{y'}$ — угловой коэффициент нормали; X, Y — абсцисса и ордината произвольной точки графика нормали;

в) длина (модуль) радиус-вектора произвольной точки графика функции $y = y(x)$ равен $\sqrt{x^2 + y^2}$, где x, y — абсцисса и ордината произвольной точки.

2°. Задачи на движение:

При прямолинейном движении скорость $v = v(t)$ материальной точки массы m удовлетворяет второму закону Ньютона: $mv' = F$, где F — равнодействующая всех сил, действующих на точку.

Задачи для решения на практическом занятии

10.4.1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 3)$, если произведение углового коэффициента касательной,

проведенной в любой точке этой кривой, на абсциссу точки касания равно полусумме координат точки касания.

10.4.2. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его массе. Через 2 часа после начала брожения масса фермента составила 6 г, а после 6 часов — 24 г. Какова была первоначальная масса фермента?

10.4.3. Материальная точка движется прямолинейно; на нее действует сила, пропорциональная времени, которое проходит с момента, когда скорость была равна нулю (коэффициент пропорциональности равен 4). Кроме того, на точку действует сила сопротивления, пропорциональная произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности равен 2). Найти зависимость скорости от времени при условии $m = 1$.

10.4.4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(4; 3)$, если любая касательная, проведенная к этой кривой, отсекает на оси ординат отрезок, равный удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.

10.4.5. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 4)$, если площадь трапеции, образованная осями координат, отрезком касательной, соединяющей точку касания с осью Oy , и ординатой точки касания, равна 12.

10.4.6. Найти уравнение кривой, если длина отрезка нормали от произвольной точки кривой до оси Ox постоянна и равна 3.

Задачи для домашнего задания

10.4.7. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0; 2)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке этой кривой, равен сумме координат точки касания.

10.4.8. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. В начальный момент времени температура тела составляла 100° ; через 20 минут тело остыло до 60° . Через сколько минут температура тела изменится от 100° до 25° , если температура воздуха постоянно равна 20° .

10.4.9. Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы, которая пропорциональна квадрату отношения вре-

10. Дифференциальные уравнения

мени к скорости (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости от времени при условии, что в начальный момент движения скорость точки равнялась нулю.

10.4.10. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0,5;0,5)$, если любая касательная, проведенная к этой кривой, на оси ординат отсекает отрезок, который равен кубу абсциссы точки касания.

10.4.11. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(2;5)$, если площадь прямоугольника, построенного на абсциссе точки касания и на начальной ординате касательной, равна 4.

10.4.12. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0;1)$, если любая нормаль, проведенная к этой кривой, на оси абсцисс отсекает отрезок, который равен длине радиус-вектора точки касания.

Ответы

10.4.1. $y = 2\sqrt{x} + x$.

10.4.2. 3 г.

10.4.3. $v = 2(1 - e^{-t^2})$.

10.4.4. $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{32}{x^2}$.

10.4.5. $y = \frac{8}{x} - 4x^2$.

10.4.6. $(x + C)^2 + y^2 = 9, y \neq 0$.

10.4.7. $y = 3e^x - x - 1$.

10.4.8. 80 мин.

10.4.9. $v = \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

10.4.10. $y = \frac{9}{8}x - \frac{x^3}{2}$.

10.4.11. $y = \frac{2}{x} + 2x$.

10.4.12. $y^2 = 2x + 1$.

11. РЯДЫ

11.1. Числовые ряды: определение, основные понятия, теоремы.

Знакоположительные ряды. Необходимый и достаточные признаки сходимости (два практических занятия)

1°. *Числовым рядом* (или просто рядом) называется выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — действительные числа. Эти числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются *членами* ряда, причем u_1 — первым, u_2 — вторым, ..., u_n — n -ым (общим) членами ряда. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ считается заданным, если $u_n = f(n)$, где $f(n)$ — известная функция натурального аргумента n . Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакоположительным*, если $u_n \geq 0$ при всех $n \in N$.

2°. Сумма первых n членов числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется его *n -ой частичной суммой* и обозначается S_n , т. е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм S_n , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, при этом число S называется *суммой ряда*; если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не

11. Ряды

существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *расходящимся* (расходящийся ряд суммы не имеет).

3°. *Теорема (необходимый признак сходимости)*. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточный признак расходимости). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

4°. *Признак сравнения (в виде неравенства)*. Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем для всех n справедливо неравенство $u_n \leq v_n$, то:

- 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;
- 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Замечание. Этот признак остается в силе, если неравенство $u_n \leq v_n$ выполняется не для всех n , а только начиная с некоторого номера n .

Признак сравнения (в предельной форме). Если даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ ($0 < A < \infty$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда можно установить, сравнив его с *рядами-эталоном*, о которых известно, сходятся они или расходятся. Ряды-эталоны:

1) *ряд геометрической прогрессии*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

при $|q| < 1$ — сходится, его сумма $S = \frac{a}{1-q}$; при $|q| \geq 1$ — расходится;

2) гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ — расходится;}$$

3) обобщенный гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

при $p > 1$ — сходится; при $0 < p \leq 1$ — расходится.

5°. Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов.

Признак д'Аламбера. Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд

сходится при $l < 1$, ряд расходится при $l > 1$.

Радикальный признак Коши. Если для знакоположительного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,

то ряд сходится при $l < 1$, ряд расходится при $l > 1$.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ при $x \geq 1$ — непрерывная, положительная и монотонно убывающая, то знако-

положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, сходится или расходит-

ся в зависимости от того, сходится или расходится несобственный

интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Задачи для решения на практическом занятии

11.1.1. Для числовых рядов: а) выписать первые три члена ряда; б) найти частичную сумму S_n ; в) исследовать сходимость ряда, пользуясь только определением сходимости, и указать сумму ряда, если она существует.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} 1^n.$$

11.1.2. Исследовать сходимость рядов при помощи признаков сравнения, предварительно применив необходимый признак сходимости:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 + 1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

11.1.3. Исследовать сходимость рядов при помощи признака Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{3n+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}; \quad 6) \frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 8}{4} + \dots + \frac{5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{n^2} + \dots$$

11.1.4. Исследовать сходимость рядов при помощи радикального признака Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{2n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+1}{27n} \right)^{-\frac{n}{3}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n^2+2}{n^2+1} \right)^{-n^3}.$$

11.1.5. Исследовать сходимость рядов при помощи интегрального признака Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{-2}(3n-1)}{3n-1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln(2n-1)}}{2n-1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}.$$

11.1.6. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n^2+1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^2 n + 4)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2 \cdot n!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^8+5}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{5^{2n-3}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^4}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos^2 n}.$$

Задачи для домашнего задания

11.1.7. Для числовых рядов: а) выписать первые три члена ряда; б) найти частичную сумму S_n ; в) исследовать сходимость ряда, пользуясь только определением сходимости, и указать сумму ряда, если она существует.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

11.1.8. Исследовать сходимость рядов при помощи признаков сравнения, предварительно применив необходимый признак сходимости:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{n^3}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+1}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}.$$

11.1.9. Исследовать сходимость рядов при помощи признака Даламбера:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^{n-1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+3}}{3n-2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad 6) \frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 7}{2} + \dots + \frac{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+3)}{n!} + \dots$$

11.1.10. Исследовать сходимость рядов при помощи радикального признака Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \right)^{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+1}{25n^2} \right)^{\frac{n}{2}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^{2n^2};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{3n^2}{4n^2-1} \right)^{n^3}.$$

11.1.11. Исследовать сходимость рядов при помощи интегрального признака Коши:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^3(2n+1)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{(3n-1)^2}}{3n-1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^{-2} n}{n^2+1}.$$

11.1.12. Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

$$1) \frac{7}{1} + \frac{7 \cdot 10}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} + \dots; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n-3} \right)^{-2n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 9)}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[4]{n^9 + 7}};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{4n^3}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+1}.$$

Ответы

11.1.1. 1) а) $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$; б) $S_n = \frac{n}{2n+4}$; в) сходится, $S = \frac{1}{2}$;

2) а) $\frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}$; б) $S_n = \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$; в) сходится,

$S = \frac{3}{4}$; 3) а) 1, 1, 1; б) $S_n = n$; в) расходится, $S = \infty$.

11.1.2. 1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) сходится;
5) расходится; 6) сходится.

11.1.3. 1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) сходится;
5) сходится; 6) расходится.

11.1.4. 1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) расходится.

11.1.5. 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.

11.1.6. 1) расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится;
5) сходится; 6) расходится; 7) расходится; 8) сходится;
9) сходится; 10) сходится.

11.1.7. 1) а) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}$; б) $S_n = \frac{n}{2n+1}$; в) сходится, $S = \frac{1}{2}$;

2) а) $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}$; б) $S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$; в) сходится, $S = 6$;

3) а) $-1, 1, -1$; б) $S_n = \begin{cases} 0, & n - \text{четное}; \\ -1, & n - \text{нечетное} \end{cases}$;

в) расходится, S не существует.

11.1.8. 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится;
5) сходится; 6) сходится.

11.1.9. 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) расходится;
5) сходится; 6) расходится.

11.1.10. 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится.

11.1.11. 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится.

11.1.12. 1) расходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится;
5) расходится; 6) сходится; 7) расходится; 8) расходится.

11.2. Знакопередающие и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

1°. *Знакопередающим рядом* называется числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \text{ где } u_n > 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}$$

(т. е. это числовой ряд, в котором за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным — положительный).

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакопередающегося ряда). Если для знакопередающегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \text{ выполняются условия:}$$

1) последовательность модулей членов ряда монотонно убывает, т. е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$;

2) предел общего члена ряда равен нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится, причем его сумма S удовлетворяет условию $0 < S \leq u_1$.

Замечание. Знакопередающий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится по признаку Лейбница и в том случае, если условие 1) выполняется, начиная не с первого, а с некоторого другого члена ряда, а $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Знакопередающий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходится. Знакопередающий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, расходится.

2°. Знакопеременным рядом называется числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечно много положительных и отрицательных членов.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из модулей членов данного знакопеременного ряда.

Определения абсолютно и условно сходящегося знакопеременного ряда совершенно аналогичны соответствующим определениям для знакопередающего ряда.

Задачи для решения на практическом занятии

11.2.1. Исследовать знакопередающиеся ряды. Установить, какие из них сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^3+2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+2)}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

11.2.2. Исследовать знакочередующиеся ряды. Установить, какие из них сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2n^4 + 3}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \frac{1}{2n+1}.$$

Задачи для домашнего задания

11.2.3. Исследовать знакочередующиеся ряды. Установить, какие из них сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2^n};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{3n+5}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{\sqrt{n^6 + 1}};$$

$$7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}.$$

11.2.4. Исследовать знакочередующиеся ряды. Установить, какие из них сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n (n+1)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{n}{3n^4 + 1}.$$

Ответы

11.2.1. 1) условно сходится; 2) абсолютно сходится;
3) абсолютно сходится; 4) расходится;
5) условно сходится; 6) расходится;
7) абсолютно сходится.

11.2.2. 1) расходится; 2) абсолютно сходится;
3) условно сходится.

11.2.3. 1) абсолютно сходится; 2) условно сходится;
3) расходится; 4) расходится; 5) расходится;
6) абсолютно сходится; 7) условно сходится.

11.2.4. 1) расходится; 2) абсолютно сходится;
3) абсолютно сходится.

11.3. Степенные ряды. Интервал и область сходимости. Свойства степенных рядов

1°. *Функциональным рядом* называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ — известные функции от переменной x . Точка x_0 , для которой числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$; если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Совокупность значений переменной x , при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

2°. Важнейшим частным случаем функционального ряда является степенной ряд, членами которого являются степенные функции. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — *коэффициенты* степенного ряда (действительные числа), a — некоторое постоянное число. При $a = 0$ степенной ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ — наиболее популярная форма степенного ряда.

3°. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ этот ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится. Число R называется *радиусом сходимости*, а интервал $(-R; R)$ — *интервалом сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. На концах интервала сходимости, т. е. при $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Для нахождения интервала

сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ следует найти радиус сходимости по формулам $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ или $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Совокупность значений переменной x , при которых степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, называется его *областью сходимости*.

Замечания: 1. Существуют степенные ряды, интервал сходимости которых вырождается в точку ($R = 0$) или содержит всю числовую ось ($R = \infty$).

2. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ содержит не все степени x , т. е. часть коэффициентов степенного ряда равна нулю, то интервал сходимости степенного ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признак Даламбера (или радикальный признак Коши) для ряда модулей $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

3. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ имеет вид $(a-R; a+R)$, где R — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, при условии $t = x-a$.

4°. Основные свойства степенных рядов:

1) сумма $S(x)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является функцией непрерывной внутри интервала сходимости $(-R; R)$;

2) степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри интервала сходимости $(-R; R)$ можно почленно дифференцировать, причем $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$;

11. Ряды

3) степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ внутри интервала сходимости $(-R; R)$ можно почленно интегрировать, причем, если $-R < x_1 < x_2 < R$, то $\int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_n x^n) dx$.

Задачи для решения на практическом занятии

11.3.1. Найти область сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n+2}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n-1} \cdot x^n}{n^2+1}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n+1}}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln(n+2)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(2n+1)}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n-3} \right)^{2n} x^n$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot x^n}{\sqrt{n+1}}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{9^n \sqrt{n}}$.

Задачи для домашнего задания

11.3.2. Найти область сходимости степенного ряда:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n^2+1}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot x^n}{7^{n-1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^{2n-3}}$;
6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2+1}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{-n} x^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$;
10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{4^n \cdot n^2}$.

Ответы

- 11.3.1. 1) $[-1; 1)$; 2) $(-1; 1)$; 3) $[-0,25; 0,25]$; 4) $(-4; 4)$; 5) $[1; 3)$;
6) $[-2; 0]$; 7) $(-4; 4)$; 8) 0 ; 9) $(-\infty; \infty)$; 10) $(-3; 3)$.
11.3.2. 1) $(-1; 1)$; 2) $[-1; 1)$; 3) $(-7; 7)$; 4) $[-0,5; 0,5]$; 5) $[-22; 28]$;
6) $[-3; -1]$; 7) $(-1; 1)$; 8) $(-\infty; \infty)$; 9) 0 ; 10) $[-2; 2]$.

11.4. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.

Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям

1°. Функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 , может быть разложена в этой окрестности по степеням $x - x_0$ в сходящийся к этой функции степенной ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этой окрестности выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0; x) \text{ — остаточный член в форме}$$

Лагранжа. При $x_0 = 0$ из ряда Тейлора получается ряд по степеням x , который называется рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

2°. Разложение в ряд Маклорена некоторых функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

если $m \geq 0$, то $x \in [-1; 1]$;

если $-1 < m < 0$, то $x \in (-1; 1]$;

если $m \leq -1$, то $x \in (-1; 1)$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

Замечание. Для вычисления логарифма эффективна формула

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1),$$

с помощью которой гораздо быстрее можно достичь заданную точность вычислений.

3°. Для вычисления приближенного значения функции в ее разложении в степенной ряд сохраняют некоторое конечное число первых членов рядов, а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить остаток R_n — сумму отброшенных членов ряда. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременующегося ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < u_{n+1}$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Задачи для решения на практическом занятии

11.4.1. Разложить следующие функции в ряд по степеням x :

1) $y = e^{x^2}$; 2) $y = \sin \frac{x}{3}$; 3) $y = \cos^2 x$; 4) $y = \sqrt[3]{8+4x}$;

5) $y = \ln(1-3x^2)$.

11.4.2. Разложить следующие функции в ряд по степеням $x-1$:

1) $y = x^3 + x + 1$; 2) $y = e^x$; 3) $y = \ln x$; 4) $y = \frac{1}{x}$.

11.4.3. Применяя разложения в ряд Маклорена некоторых функций, вычислить приближенные значения выражений с точностью до 0,001:

1) $\sqrt{e}$; 2) e^{-1} ; 3) $\sin 15^\circ$; 4) $\sqrt[3]{69}$; 5) $\ln 3$.

11.4.4. Применяя разложения в ряд Маклорена некоторых функций, вычислить приближенные значения интегралов с точностью до 0,01:

1) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; 2) $\int_0^{0.9} x^3 \sin(2x) dx$; 3) $\int_0^{0.8} \ln(1+x^3) dx$; 4) $\int_0^{0.7} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x^4}}$.

11.4.5. Применяя метод последовательного дифференцирования, найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

- 1) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$; 2) $y' = \sin x + \sqrt{y}$, $y(0) = 4$;
3) $y' = e^y$, $y(0) = 1$.

Задачи для домашнего задания

11.4.6. Разложить следующие функции в ряд по степеням x :

- 1) $y = e^{3x}$; 2) $y = \sin x^2$; 3) $y = \sin^2 x$; 4) $y = \sqrt[4]{81 - 27x}$;
5) $y = \ln(1 + 2x^3)$.

11.4.7. Разложить следующие функции в ряд по степеням $x + 2$:

- 1) $y = x^3 - 2x + 2$; 2) $y = 2^x$; 3) $y = \sqrt{x+3}$; 4) $y = \frac{1}{x-1}$.

11.4.8. Применяя разложения в ряд Маклорена некоторых функций, вычислить приближенные значения выражений с точностью до 0,001:

- 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) $1/\sqrt{e}$; 3) $\cos 20^\circ$; 4) $\sqrt[4]{90}$; 5) $\ln 4$.

11.4.9. Применяя разложения в ряд Маклорена некоторых функций, вычислить приближенные значения интегралов с точностью до 0,01:

- 1) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$; 2) $\int_0^{0.8} x^2 \cos \frac{\sqrt{x}}{2} dx$; 3) $\int_0^{0.7} \ln(1 + 2x^4) dx$; 4) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x^2}}$.

11.4.10. Применяя метод последовательного дифференцирования, найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

- 1) $y' = e^{2x} + y^2$, $y(0) = 2$; 2) $y' = \sqrt{y^3} + x$, $y(0) = 1$;
3) $y' = 3 - e^y$, $y(0) = 0$.

Ответы

- 11.4.1.** 1) $1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$, $x \in (-\infty; \infty)$;

$$2) \frac{x^1}{3^1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{3^5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \dots,$$

$$x \in (-\infty; \infty);$$

$$3) 1 - \left(\frac{2^1 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right),$$

$$x \in (-\infty; \infty);$$

$$4) 2 + \frac{1 \cdot x}{3^1 \cdot 1!} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x^2}{3^2 \cdot 2! 2^1} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (3n-4) \cdot x^n}{3^n \cdot n! 2^{n-1}} + \dots,$$

$$x \in [-2; 2];$$

$$5) - \left(\frac{3^1 x^2}{1} + \frac{3^2 x^4}{2} + \frac{3^3 x^6}{3} + \dots + \frac{3^n x^{2n}}{n} + \dots \right),$$

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$11.4.2. 1) 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$2) e \left(1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots \right), \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$3) (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots,$$

$$x \in (0; 2];$$

$$4) 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots, \quad x \in (0; 2).$$

$$11.4.3. 1) 1,648; 2) 0,368; 3) 0,259; 4) 4,101; 5) 1,098.$$

$$11.4.4. 1) 0,86; 2) 0,16; 3) 0,09; 4) 0,68.$$

$$11.4.5. 1) y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3; 2) y = 4 + 2x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3;$$

$$3) y = 1 + x + 0,5x^2 + 0,5x^3.$$

$$11.4.6. 1) 1 + \frac{3^1 x}{1!} + \frac{3^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{3^n x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$2) x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$3) \frac{2^1 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$x \in (-\infty; \infty);$$

$$4) 3 - \frac{x}{4 \cdot 1!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{4^2 \cdot 3! \cdot 2!} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n-5) \cdot x^n}{4^n \cdot 3^{n-1} \cdot n!} - \dots,$$

$$x \in [-3; 3];$$

$$5) \frac{2^1 x^3}{1} - \frac{2^2 x^6}{2} + \frac{2^3 x^9}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^n x^{3n}}{n} + \dots,$$

$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right].$$

11.4.7. 1) $-2 + 10(x+2) - 6(x+2)^2 + (x+2)^3$, $x \in (-\infty; \infty)$;

$$2) \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\ln 2 \cdot (x+2)}{1!} + \frac{\ln^2 2 \cdot (x+2)^2}{2!} + \dots + \frac{\ln^n 2 \cdot (x+2)^n}{n!} + \dots \right), x \in (-\infty; \infty);$$

$$3) 1 + \frac{1 \cdot (x+2)}{2^1 \cdot 1!} - \frac{1 \cdot 1 \cdot (x+2)^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (x+2)^n}{2^n \cdot n!} + \dots, x \in [-3; -1];$$

$$4) -\frac{1}{3} - \frac{x+2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{3^3} - \dots - \frac{(x+2)^n}{3^n} + \dots, x \in (-3; -1).$$

11.4.8. 1) 1,395; 2) 0,607; 3) 0,939; 4) 3,080; 5) 1,386.

11.4.9. 1) 0,94; 2) 0,16; 3) 0,07; 4) 0,47.

11.4.10. 1) $y = 2 + 5x + 11x^2 + \frac{71}{3}x^3$; 2) $y = 1 + x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^3$;

$$3) y = 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

12. РЯДЫ ФУРЬЕ

12.1. Разложение функций в ряд Фурье

1°. *Рядом Фурье* периодической функции $f(x)$ с периодом 2π , которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$, называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где a_0, a_n, b_n — коэффициенты ряда Фурье, причем $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2°. *Теорема Дирихле.* Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π , которая определена на отрезке $[-\pi; \pi]$, является на нем *кусочно-непрерывной* (непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода) и *кусочно-монотонной* (монотонна или имеет конечное число точек экстремума), то ряд Фурье этой функции сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, причем сумма $S(x)$ этого ряда определяется по формулам:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках x непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi; \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$ во всех точках x_0 разрыва I рода функции $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi; \pi]$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0))$ при $x = \pm\pi$.

3°. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$, где l — произвольное число, определена на отрезке $[-l; l]$ и удовлетворяет на

нем условиям Дирихле (кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна), то эта функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где a_0, a_n, b_n — коэффициенты ряда Фурье, причем $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Замечания: 1. Для вычисления коэффициентов a_n и b_n ряда Фурье применяется формула интегрирования по частям

$$\int_c^d u dv = uv \Big|_c^d - \int_c^d v du.$$

2. Для упрощения полученных разложений следует помнить:

$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1; \sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n$ при $n = 1, 2, 3, \dots$;

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} -2, & \text{если } n = 2k+1; \\ 0, & \text{если } n = 2k. \end{cases}, \quad (-1)^n + 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1; \\ 2, & \text{если } n = 2k. \end{cases},$$

$k = 0, 1, \dots$

Задачи для решения на практическом занятии

12.1.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi)$ уравнением $f(x) = x + \pi$

12.1.2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi)$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (-\pi; 0); \\ 2, & \text{если } x \in (0; \pi). \end{cases}$$

12.1.3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2, заданную на промежутке $(-1; 1]$ уравнением $f(x) = 2x - 1$.

12. Ряды Фурье

12.1.4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 4, заданную на промежутке $[-2; 2)$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-2; 0); \\ x^2, & \text{если } x \in [0; 2). \end{cases}$$

Задачи для домашнего задания

12.1.5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi]$ уравнением $f(x) = 2x - \pi$.

12.1.6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi]$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (-\pi; 0); \\ 0, & \text{если } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

12.1.7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 4, заданную на промежутке $(-2; 2]$ уравнением $f(x) = 2x + x^2$.

12.1.8. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 4π , заданную на промежутке $(-2\pi; 2\pi)$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (-2\pi; 0]; \\ 2\pi - x, & \text{если } x \in (0; 2\pi). \end{cases}$$

Ответы

$$12.1.1. \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

$$12.1.2. \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$12.1.3. -1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

$$12.1.4. \frac{2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3 \pi^3} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} \right).$$

$$12.1.5. -\pi + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

$$12.1.6. \frac{-\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right).$$

$$12.1.7. \frac{4}{3} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right).$$

$$12.1.8. -\pi + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k+1)^2 \pi} \cos \frac{(2k+1)x}{2} + \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)x}{2} \right).$$

12.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье по косинусам и синусам

1°. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на отрезке $[-\pi; \pi]$ условиям Дирихле и является *четной* ($f(-x) = f(x)$), то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на отрезке $[-\pi; \pi]$ условиям Дирихле и является *нечетной* ($f(-x) = -f(x)$), то ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$\text{где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

12. Ряды Фурье

2°. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$, где l — произвольное число, удовлетворяет на отрезке $[-l; l]$ условиям Дирихле и является *четной*, то разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ удовлетворяет на отрезке $[-l; l]$ условиям Дирихле и является *нечетной*, то разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{где } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3°. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; l]$, то для разложения в ряд Фурье ее достаточно доопределить на отрезке $[-l; 0]$, а затем осуществить периодическое продолжения полученной функции с периодом $2l$. Ряд Фурье функции $f_1(x)$, полученной из функции $f(x)$ предложенным способом, будет рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0; l]$.

Чаще всего функцию $f(x)$ на отрезке $[-l; 0]$ доопределяют *четным* образом ($f(x) = f(-x)$ при $x \in [-l; 0]$) или *нечетным* образом ($f(x) = -f(-x)$ при $x \in [-l; 0]$). Если доопределение функции $f(x)$ на отрезок осуществлено четным образом, то функция $f(x)$

будет разлагаться в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$ по косинусам; если

доопределение функции $f(x)$ на отрезке $[-l; 0]$ осуществлено нечетным образом, то функция $f(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ по синусам (формулы для вычисления коэффициентов этих рядов приведены в пункте 2°).

Замечание. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; \pi]$, то для получения разложения в ряд Фурье по косинусам или по синусам нужно эту функцию доопределить на отрезке $[-\pi; 0]$ соответственно или четным или нечетным образом (как описано выше).

Задачи для решения на практическом занятии

12.2.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi)$ уравнением $f(x) = |x|$.

12.2.2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 4, заданную на промежутке $[-2; 2)$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{если } x \in [-2; 0); \\ \pi, & \text{если } x \in [0; 2). \end{cases}$$

12.2.3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi]$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in (-\pi; 0); \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ x-1, & \text{если } x \in (0; \pi). \end{cases}$$

12.2.4. Разложить в ряд Фурье по косинусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0; 1]$ уравнением $f(x) = 2x - 1$.

12.2.5. Разложить в ряд Фурье по синусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0; \pi)$ уравнением $f(x) = -3$.

12.2.6. Разложить в ряд Фурье по синусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0; 2]$ уравнением $f(x) = x^2$.

Задачи для домашнего задания

12.2.7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , заданную на промежутке $(-\pi; \pi]$ уравнением $f(x) = 2x$.

12. Ряды Фурье

12.2.8. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2, заданную на промежутке $[-1; 1]$ уравнением

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{если } x \in [-1; 0]; \\ 1-x, & \text{если } x \in (0; 1]. \end{cases}$$

12.2.9. Разложить в ряд Фурье по косинусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0; \pi]$ уравнением $f(x) = x - \pi$.

12.2.10. Разложить в ряд Фурье по синусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0; 2\pi]$ уравнением $f(x) = \pi^2$.

12.2.11. Разложить в ряд Фурье по косинусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0; 2]$ уравнением $f(x) = 2x - x^2$.

12.2.12. Разложить в ряд Фурье по синусам периодическую функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0; 2]$ уравнением $f(x) = x^2 - 2x$.

Ответы

$$12.2.1. \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$12.2.2. 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k+0,5)\pi x}{2k+1}.$$

$$12.2.3. \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\pi-1)(-1)^n + 1) \sin nx}{n} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2\pi-4) \sin(2k-1)x}{\pi(2k-1)} - \frac{\sin 2kx}{k} \right).$$

$$12.2.4. \frac{-8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

$$12.2.5. \frac{-12}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$12.2.6. -8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} = .$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{(2k-1)\pi} - \frac{4}{(2k-1)^3 \pi^3} \right) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} - \frac{\sin k\pi x}{2k\pi} \right).$$

$$12.2.7. 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

$$12.2.8. \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

$$12.2.9. \frac{-\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

$$12.2.10. 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k+0,5)x}{2k+1}.$$

$$12.2.11. \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi x}{k^2}.$$

$$12.2.12. \frac{-32}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k+0,5)\pi x}{(2k+1)^3}.$$

13. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

13.1. Основные уравнения математической физики. Уравнение колебания струны

1°. Основными уравнениями математической физики (уравнениями в частных производных) являются уравнения:

1) *уравнение колебания струны*, или *волновое* (тип — *гиперболический*)

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx},$$

где $u = u(x; t)$ — неизвестная функция двух переменных, которая задает отклонение точек струны от положения равновесия в момент времени t (при каждом фиксированном значении t график функции $u = u(x; t)$ на плоскости xOy определяет форму струны в момент времени t); u''_{tt} , u''_{xx} — частные производные второго порядка от неизвестной функции $u = u(x; t)$ по переменным t и x ; a^2 — заданная постоянная величина;

2) *уравнение теплопроводности* (тип — *параболический*)

$$u'_t = a^2 u''_{xx},$$

где $u = u(x; t)$ — неизвестная функция двух переменных, которая задает температуру в любой точке с координатой x тонкого однородного теплоизолированного стержня в момент времени t ; u'_t , u''_{xx} — частные производные от функции $u = u(x; t)$ по переменным t и x ; a^2 — заданная постоянная величина;

3) *уравнение Лапласа* (тип — *эллиптический*)

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

где $u = u(x; y)$ — неизвестная функция двух переменных, которая задает стационарное распределение теплоты в пластине с тепло-

изолированной границей; u''_{xx} , u''_{yy} — вторые частные производные от функции $u = u(x; y)$ по переменным x и y .

2°. Решение уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, которое удовлетворяет граничным $u(0; t) = 0$, $u(l; t) = 0$ и начальным условиям $u(x; 0) = \varphi(x)$, $u'_t(x; 0) = \psi(x)$, имеет вид,

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{an\pi t}{l} + b_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Приведенное решение позволяет вычислить отклонение точек струны $u = u(x; t)$ конечной длины l от положения равновесия в момент времени t , если струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$ (граничные условия), а в момент времени $t = 0$ форма струны определяется функцией $\varphi(x)$ и скорость каждой ее точки — функцией $\psi(x)$ (начальные условия).

Задачи для решения на практическом занятии

13.1.1. Указать название и тип следующих уравнений математической физики:

- 1) $u'_t = 9u''_{xx}$;
- 2) $u''_{tt} = u''_{xx}$;
- 3) $u''_{yy} = -u''_{xx}$.

13.1.2. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = 2$. В начальный момент времени она имеет форму, заданную

функцией $\varphi(x) = \begin{cases} 0, 1x, & \text{при } x \in [0; 1]; \\ 0, 1(2 - x), & \text{при } x \in (1; 2]. \end{cases}$ Найти отклонение то-

чек струны от оси абсцисс в любой момент времени t , если начальные скорости точек струны отсутствуют и $a^2 = 4$.

13.1.3. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = 4$. В начальный момент времени она совпадает с осью Ox , а начальная скорость точек струны равна 1. Найти форму струны для любого момента времени t , если $a^2 = 16$.

13. Уравнения математической физики

13.1.4. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = l$. В начальный момент времени она имеет форму параболы

$$\varphi(x) = \frac{hx(l-x)}{l^2}.$$
 Найти смещение точек струны от ее положения

равновесия в любой момент времени t , если начальные скорости точек струны равны нулю.

Задачи для домашнего задания

13.1.5. Указать название и тип следующих уравнений математической физики:

1) $4u_{yy}'' + 4u_{xx}'' = 0$;

2) $u_t' - u_{xx}'' = 0$;

3) $2u_{\eta\eta}'' = 5u_{xx}''$.

13.1.6. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = \pi$. В начальный момент времени она совпадает с осью Ox , а начальная скорость точек струны равна πx . Найти форму струны для любого момента времени t , если $a = \pi$.

13.1.7. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = l$. В начальный момент времени она имеет форму, заданную

функцией $\varphi(x) = \begin{cases} (h/l)x, & \text{при } x \in [0; l/2]; \\ (h/l)(l-x), & \text{при } x \in (l/2; l]. \end{cases}$ Найти отклонение

точек струны от оси абсцисс в любой момент времени t , если начальные скорости точек струны отсутствуют.

13.1.8. Дана струна, которая закреплена на концах в точках $x = 0$ и $x = 2$. В начальный момент времени она имеет форму параболы $\varphi(x) = 0,1x(x-2)$. Найти смещение точек струны от ее положения равновесия любой момент времени t , если начальные скорости точек струны равны нулю и если $a^2 = 9$.

Ответы

13.1.1. 1) теплопроводности; параболический; 2) колебания струны; гиперболический; 3) Лапласа; эллиптический.

$$13.1.2. \frac{0,8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

$$13.1.3. \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi t \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{4}.$$

$$13.1.4. \frac{8h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{a(2k+1)\pi t}{l} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

13.1.5. 1) Лапласа; эллиптический; 2) теплопроводности; параболический 3) колебания струны; гиперболический.

$$13.1.6. 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin \pi n t \cdot \sin n x.$$

$$13.1.7. \frac{4h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{an\pi t}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} =$$

$$\frac{4h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{a(2k+1)\pi t}{l} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

$$13.1.8. \frac{-3,2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{3(2k+1)\pi t}{2} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

13.2. Уравнение теплопроводности

1°. Решение уравнения $u_t' = a^2 u_{xx}''$, которое удовлетворяет начальному $u(x;0) = f(x)$ и граничным $u(0;t) = 0$, $u(l;t) = 0$ условиям, имеет вид,

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$.

Приведенное решение позволяет вычислить температуру $u = u(x;t)$ в любой точке с координатой x тонкого однородного теплоизолированного стержня длины l , если начальное распределе-

ние температуры в стержне задается функцией $f(x)$ (начальное условие), а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = l$ поддерживается постоянная нулевая температура (граничные условия).

2°. Решение уравнения $u_t' = a^2 u_{xx}''$, которое удовлетворяет начальному $u(x; 0) = f(x)$ и граничным условиям $u_x'(0; t) = 0$, $u_x'(l; t) = 0$, имеет вид

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{l}\right)^2 t} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$.

Приведенное решение позволяет вычислить температуру $u = u(x; t)$ в любой точке с координатой x тонкого однородного теплоизолированного стержня длины l , если начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x)$ (начальное условие), а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = l$ тепловой поток равен нулю (через указанные концы стержня не происходит теплообмен с внешней средой) — граничные условия.

Задачи для решения на практическом занятии

13.2.1. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины 2. Начальное распределение температуры в стержне задается функцией

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in [0; 1]; \\ 2 - x, & \text{при } x \in (1; 2] \end{cases},$$

а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = 2$ поддерживается постоянная температура, равная нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a^2 = 1$.

13.2.2. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины l . Начальное распределение температуры в стержне задается функцией

$$f(x) = \frac{x(l-x)}{l^2},$$

а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = l$ поддерживается постоянная температура, равная нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t .

13.2.3. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины 5. Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = x/5$, а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = 5$ тепловой поток равен нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a^2 = 25$.

13.2.4. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины π . Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = \sin x$, а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = \pi$ не происходит теплообмен с внешней средой. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a^2 = 0,25$.

Задачи для домашнего задания

13.2.5. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины 4. Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in [0; 1]; \\ 1, & \text{при } x \in [1; 3]; \\ 4 - x, & \text{при } x \in (3; 4] \end{cases}$, а на концах стержня

в точках $x = 0$ и $x = 4$ поддерживается постоянная температура, равная нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a^2 = 16$.

13.2.6. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины 3. Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = x(x - 3)$, а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = 3$ поддерживается постоянная температура, равная нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a^2 = 1$.

13.2.7. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины π . Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = \pi x$, а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = \pi$ не происходит теплообмен с внешней средой. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t , если $a = 3$.

13. Уравнения математической физики

13.2.8. Дан тонкий однородный теплоизолированный стержень длины l . Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $f(x) = x^2$, а на концах стержня в точках $x = 0$ и $x = l$ тепловой поток равен нулю. Найти функцию распределения температуры в стержне в любой момент времени t .

Ответы

$$13.2.1. \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

$$13.2.2. \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

$$13.2.3. \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 t} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi x}{5}.$$

$$13.2.4. \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{-k^2 t} \cdot \cos 2kx.$$

$$13.2.5. \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \cdot e^{-n^2 \pi^2 t} \cdot \sin \frac{n\pi x}{4}.$$

$$13.2.6. \frac{-72}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{3}.$$

$$13.2.7. \frac{\pi^2}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-9(2k+1)^2 t} \cdot \cos(2k+1)x.$$

$$13.2.8. \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{(n\pi a)^2 t}{l^2}} \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

14. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1. Вычисление двойного интеграла

1°. *Двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы σ , не зависящий от способа разбиения области D на элементарные области и от выбора точек $M_i(\xi_i; \eta_i)$ в пределах каждой из них, вычисленный при условии, что длина наибольшего диаметра d_i элементарной области стремится к нулю:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i.$$

2°. *Теорема.* Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ существует.

3°. Основные свойства двойного интеграла:

$$1) \iint_D k \cdot f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ где } k — \text{константа};$$

$$2) \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy;$$

$$3) \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy, \text{ если область}$$

D разбита на две области D_1 и D_2 ;

$$4) \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0, \text{ если в области } D \text{ справедливо неравенство } f(x, y) \geq 0;$$

14. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные интегралы

$$5) \iint_D f_1(x; y) dx dy \geq \iint_D f_2(x; y) dx dy, \text{ если в области } D \text{ справедливо неравенство } f_1(x; y) \geq f_2(x; y);$$

ливо неравенство $f_1(x; y) \geq f_2(x; y)$;

$$6) \iint_D f(x; y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot S; \text{ где точка } M(x_0; y_0) \in D, S \text{ площадь области } D.$$

щадь области D .

4°. *Геометрический смысл двойного интеграла*: если $f(x; y) \geq 0$ при условии $M(x; y) \in D$, то двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу — замкнутой областью D плоскости xOy , с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz , а направляющей служит граница области D .

5°. *Механический смысл двойного интеграла*: если $\rho(x; y)$ есть плотность пластины D , то масса этой пластины равна двойному интегралу от плотности: $m = \iint_D \rho(x; y) dx dy$.

6°. Вычисление двойного интеграла:

1) если область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми линиями $x = a$ и $x = b$ ($b > a$), а снизу и сверху соответственно непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ при $x \in [a; b]$), каждая из которых пересекается любой вертикальной прямой, проходящей через область D , только в одной точке, то двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy.$$

В правой части формулы, которая называется *повторным* ин-

тегралом, вначале вычисляется *внутренний* интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy$

при условии, что x есть константа. Заданная область D называется *правильной в направлении оси Oy*.

2) если область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми линиями $y = c$ и $y = d$ ($d > c$), а слева и справа соответственно непрерывными кривыми $x = \phi_1(y)$ и $x = \phi_2(y)$ ($\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ при $y \in [c; d]$) каждая из которых пересекается любой горизонтальной прямой, проходящей через область D , только в одной точке, то двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x; y) dx.$$

В правой части формулы, которая называется *повторным* интегралом, вначале вычисляется *внутренний* интеграл $\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x; y) dx$ при условии, что y есть константа. Заданная область D называется *правильной в направлении оси Ox* .

Замечания: 1. Если область D является правильной в направлении осей Ox и Oy , то для вычисления двойного интеграла можно использовать любую из предложенных формул.

2. Если область D не является правильной ни в направлении оси Oy , ни в направлении оси Ox , то для вычисления двойного интеграла область D следует разбить на части, которые являются правильными или в направлении оси Oy , или в направлении оси Ox .

7°. При переходе в двойном интеграле от декартовых координат x и y к полярным координатам r и φ , связанным с декартовыми координатами соотношениями $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, применяется формула: $\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr d\varphi$.

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\beta > \alpha$) и двумя кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$ при $\varphi \in [\alpha; \beta]$), каждая из которых пересекается любым лучом, выходящим из полюса O и проходящим через область D , только в одной точке, то двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r dr.$$

Задачи для решения на практическом занятии

14.1.1. Вычислить повторные интегралы:

$$1) \int_0^3 dx \int_0^x (x+2y) dy; \quad 2) \int_{-2}^0 dy \int_0^{y^2} 6xy dx; \quad 3) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^4 r dr.$$

14.1.2. Расставить пределы интегрирования в повторном ин-

теграле $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy$, если область интегрирования есть:

1) прямоугольник с вершинами: $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(4;2)$, $C(4;0)$;

2) треугольник с вершинами: $O(0;0)$, $A(1;2)$, $B(1;0)$;

3) трапеция с вершинами: $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$.

14.1.3. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$1) \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x; y) dy; \quad 2) \int_{-2}^0 dx \int_0^{x^2} f(x; y) dy; \quad 3) \int_0^2 dx \int_{x^2}^{6-x} f(x; y) dy.$$

14.1.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = x + 2$.

14.1.5. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 6x dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = -x + 2$, $y = 0$.

14.1.6. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, если область D есть часть круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 9$ и расположенная в первой и второй четвертях.

Задачи для домашнего задания

14.1.7. Вычислить повторные интегралы:

$$1) \int_0^2 dx \int_0^x (4x^2 + 6y) dy; \quad 2) \int_{-2}^0 dy \int_{y^2}^4 6dx; \quad 3) \int_0^{\pi} d\varphi \int_2^4 r^3 dr.$$

14.1.8. Расставить пределы интегрирования в повторном ин-

теграле $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy$, если область интегрирования есть:

1) квадрат с вершинами: $A(1;1), B(4;1), C(4;-2), D(1;-2)$;

2) треугольник с вершинами: $O(0;0), A(2;4), B(2;2)$;

3) треугольник с вершинами: $A(0;1), B(2;3), C(0;5)$.

14.1.9. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$1) \int_1^2 dx \int_3^{2x+1} f(x; y) dy; \quad 2) \int_1^2 dy \int_1^{5-y^2} f(x; y) dx; \quad 3) \int_0^4 dx \int_{0.75x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy.$$

14.1.10. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 0,75y dx dy$, если область D ограничена линиями $y = \sqrt{x}, y = -x + 6, x = 0$.

14.1.11. Вычислить двойной интеграл $\iint_D 4x dx dy$, если область D ограничена линиями $y = x^2 + 2, y = -x + 4, x = 0, y = 0$.

14.1.12. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{4xdy}{x^2 + y^2 + 2}$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 10, y = 0, y = x, (y \geq 0, x \geq 0)$.

Ответы

14.1.1. 1) 18; 2) -32; 3) 12π .

$$14.1.2. \quad 1) \int_0^4 dx \int_0^2 f(x; y) dy; \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x; y) dy; \quad 3) \int_0^2 dx \int_0^{x+2} f(x; y) dy.$$

$$14.1.3. \quad 1) \int_0^2 dy \int_{0.5y}^1 f(x; y) dx; \quad 2) \int_0^4 dy \int_{-2}^{-\sqrt{y}} f(x; y) dx;$$

$$3) \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x; y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x; y) dx.$$

14.1.4. 2,25.

14.1.5. 5,5.

14.1.6. 9π.

14.1.7. 1) 24; 2) 32; 3) 60π.

14.1.8. 1) $\int_1^4 dx \int_{-2}^1 f(x; y) dy$; 2) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x; y) dy$; 3) $\int_0^2 dx \int_{x+1}^{5-x} f(x; y) dy$.

14.1.9. 1) $\int_3^5 dy \int_{0.5y-0.5}^2 f(x; y) dx$; 2) $\int_1^4 dx \int_1^{\sqrt{5-x}} f(x; y) dy$;

3) $\int_0^3 dy \int_0^{4y/3} f(x; y) dx + \int_3^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x; y) dx$.

14.1.10. 23.

14.1.11. 41.

14.1.12. πln2.

14.2. Приложения двойного интеграла. Вычисление тройного интеграла

1°. *Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D , вычисляется по формуле:*

$$S = \iint_D dx dy.$$

Если область D задана в полярных координатах, то $S = \iint_D r dr d\varphi$.

2°. *Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x; y)$, снизу — замкнутой областью D плоскости xOy , с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz , а направляющей служит граница области D , вычисляется по формуле:*

$$V = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

3°. *Масса плоской фигуры*, ограниченной областью D , поверхностная плотность которой задана функцией $\rho = \rho(x; y)$, находится по формуле:

$$M = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

4°. *Статические моменты плоской фигуры относительно осей Ox и Oy* , ограниченной областью D , поверхностная плотность которой задана функцией $\rho = \rho(x; y)$, находятся по формулам:

$$M_x = \iint_D y \rho(x; y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \rho(x; y) dx dy.$$

Координаты центра тяжести $C(x_c; y_c)$ такой плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

5°. *Моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy* , ограниченной областью D , поверхностная плотность которой задана функцией $\rho = \rho(x; y)$, находятся по формулам:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x; y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x; y) dx dy,$$

а момент инерции относительно начала координат — по формуле:

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x; y) dx dy = I_x + I_y.$$

6°. Для вычисления тройного интеграла $\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz$,

если область интегрирования V ограничена снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x; y)$ и $z = z_2(x; y)$ ($z_1(x; y) \leq z_2(x; y)$ в замкнутой области D , являющейся проекцией тела V на плоскость xOy), приведем его к вычислению двойного по формуле:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz \right) dx dy.$$

Задачи для решения на практическом занятии

14.2.1. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = -2x + 7$;

2) $y^2 + 4x = 8$, $y^2 - x = 3$;

3) $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 12$ (вне окружности радиуса $\sqrt{12}$).

14.2.2. Найти объемы тел, которые ограничены поверхностями:

1) $y + z = 9$, $y = x^2$, $z = 0$;

2) $z = x^2$, $y = 4 - x$, $y = 0$, $z = 0$.

14.2.3. Вычислить статический момент и момент инерции однородной плоской фигуры, ограниченной эллипсом $x^2 + 9y^2 = 9$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq 0$, относительно оси Ox ($\rho = 1$).

14.2.4. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x = y^2 - 1$ и прямой $x = 3$.

14.2.5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V x dx dy dz$, если область

V ограничена плоскостями $z = 4 - x$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $x = 0$.

Задачи для домашнего задания

14.2.6. Вычислить площади фигур, которые ограничены линиями:

1) $y = x^2$, $y = -x + 12$, $y = 0$;

2) $y = 4x - x^2$, $x + y = 6$, $x = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 8$, $x = 2$, $x \leq 2$.

14.2.7. Найти объемы тел, которые ограничены поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $y = 3$, $x = 0$, $z = 0$;

2) $x^2 + y^2 = 16$, $y + z = 4$, $z = 0$.

14.2.8. Вычислить статический момент и момент инерции однородной плоской фигуры, ограниченной эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружностью $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, относительно оси Oy ($\rho = 1$).

14.2.9. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 8$ и $y^2 = -2x + 2$.

14.2.10. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V 5y dx dy dz$, если об-

ласть V ограничена поверхностями $z = x^2$, $z = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$.

$$14.2.1. 1) 36; 2) 13\frac{1}{3}; 3) 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$14.2.2. 1) 129,6; 2) 21\frac{1}{3}.$$

$$14.2.3. M_x = 16; I_x = \frac{39}{4}\pi.$$

$$14.2.4. C(1,4; 0).$$

$$14.2.5. 21\frac{1}{3}.$$

$$14.2.6. 1) 49,5; 2) 4\frac{2}{3}; 3) 6\pi + 4.$$

$$14.2.7. 1) 27; 2) 64\pi.$$

$$14.2.8. M_y = \frac{8}{3}; I_y = \pi.$$

$$14.2.9. C(-0,6; 0).$$

$$14.2.10. \frac{1}{12}.$$

14.3. Криволинейный интеграл

1°. Криволинейным интегралом по дуге AB от непрерывной функции $f(x; y)$ (криволинейным интегралом 1 рода) называется предел интегральной суммы σ , не зависящий от способа разбиения дуги AB на элементарные дуги и от выбора точек $M_i(\xi_i; \eta_i)$ в пределах каждой из них, вычисленный при условии, что наибольшая длина λ элементарной дуги стремится к нулю:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta l_i.$$

14. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные интегралы

2°. Некоторые свойства криволинейного интеграла I рода:

$$1) \int_{AB} f(x; y) dl = \int_{BA} f(x; y) dl, \text{ т. е. криволинейный интеграл}$$

I рода не зависит от направления пути интегрирования;

$$2) \int_L k \cdot f(x; y) dl = k \cdot \int_L f(x; y) dl, \text{ где } k — \text{константа};$$

$$3) \int_L (f_1(x; y) \pm f_2(x; y)) dl = \int_L f_1(x; y) dl \pm \int_L f_2(x; y) dl;$$

$$4) \int_L f(x; y) dl = \int_{L_1} f(x; y) dl + \int_{L_2} f(x; y) dl, \text{ если дуга } L \text{ разбита на}$$

две дуги L_1 и L_2 .

3°. Вычисление криволинейного интеграла I рода:

1) если кривая L задана уравнением $y = \varphi(x)$, причем $x \in [a; b]$, то криволинейный интеграл I рода вычисляется по формуле:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_a^b f(x; \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx;$$

2) если кривая L задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то криволинейный интеграл I рода вычисляется по формуле:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

4°. Криволинейным интегралом по координатам от выражения $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ (криволинейным интегралом II рода) по направленной дуге AB называется предел интегральной суммы σ , не зависящий от способа разбиения дуги AB на элементарные дуги и от выбора точек $M_i(\xi_i; \eta_i)$ в пределах каждой из них, вычисленный при условии, что $\lambda_1 = \max_i \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ и $\lambda_2 = \max_i \{\Delta y_i\} \rightarrow 0$, где Δx_i и Δy_i есть проекции элементарной дуги соответственно на оси Ox и Oy :

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i \text{ — криволинейный интеграл по}$$

координате x ;

$$\int_{AB} Q(x; y)dy = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i \text{ — криволинейный интеграл}$$

по координате y ;

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} P(x; y)dx + \int_{AB} Q(x; y)dy \text{ — полный}$$

криволинейный интеграл.

5°. Некоторые свойства криволинейного интеграла II рода:

$$1) \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = - \int_{BA} P(x; y)dx + Q(x; y)dy, \text{ т. е. криволинейный интеграл II рода}$$

меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования;

$$2) \int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} P(x; y)dx + \int_{AB} Q(x; y)dy;$$

3) если AB — отрезок прямой $x = C$, где $C = \text{const}$, то

$$\int_{AB} P(x; y)dx = 0; \text{ если } AB \text{ — отрезок прямой } y = C, \text{ где } C = \text{const}, \text{ то}$$

$$\int_{AB} Q(x; y)dy = 0.$$

6°. Вычисление криволинейного интеграла II рода:

1) если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, причем $A(a; \varphi(a))$ и $B(b; \varphi(b))$, то криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; \varphi(x)) + Q(x; \varphi(x)) \cdot \varphi'(x))dx;$$

2) если кривая AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t \in [\alpha; \beta]$, причем $A(x(\alpha); y(\alpha))$ и $B(x(\beta); y(\beta))$, то криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле:

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t)) \cdot y'(t))dt.$$

7°. $\oint_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ — криволинейный интеграл по зам-

кнутому контуру L не зависит от выбора начальной точки интегрирования, а зависит только от выбора направления обхода конту-

14. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные интегралы

ра (в качестве положительного направления выбирается направление движения против хода часовой стрелки);

8°. Если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой односвязной области D и контур L принадлежит этой области, то

$$\oint_L P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \text{ при условии } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Задачи для решения на практическом занятии

14.3.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x + y)dl$, если

L — отрезок прямой $y = 2x$, $x \in [0; 2]$.

14.3.2. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xydl$, если L — отрезок прямой, соединяющий точки $O(0; 0)$ и $A(1; 3)$.

14.3.3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L 3xdl$, если L — дуга параболы $y = 0,5x^2$, соединяющая точки $O(0; 0)$ и $A(\sqrt{3}; 1,5)$.

14.3.4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x + y)dl$, если L — ломаная OAB , соединяющая точки $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(2; 4)$.

14.3.5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xdl$, если L — часть дуги окружности $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, расположенная в первой четверти.

14.3.6. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \sqrt{8y}dl$, если L — арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$.

14.3.7. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y - 1)dx + xdy$, если L — отрезок прямой, соединяющая точки $A(0; 1)$ и $B(2; 5)$.

14.3.8. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L ydx - (y + x^2)dy$,

если L — дуга параболы $y = 2x - x^2$, соединяющий точки $O(0;0)$ и $B(3;-3)$.

14.3.9. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L 3ydx - 2xdy$, если

L — ломаная OAB , соединяющая точки $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(3;2)$.

14.3.10. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L ydx + xdy$, если

L — часть дуги окружности $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

14.3.11. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L \frac{xdy}{x^2 + y^2} - \frac{ydx}{x^2 + y^2}$,

если L — окружность радиуса 3 с центром в начале координат, пробегаемая против хода часовой стрелки.

14.3.12. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x + y)dx + (x - y)dy$,

если L — контур треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(2;2)$, пробегаемый по ходу часовой стрелки.

Задачи для домашнего задания

14.3.13. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L xy^2 dl$, если L —

отрезок прямой $y = 3x$, $x \in [0; \sqrt{2}]$.

14.3.14. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x + 2y)dl$, если

L — отрезок прямой, заданный уравнением $x - 0,5y = 0$, $x \in [0; 4]$.

14.3.15. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L 27y^2 x^{-3} dl$, если

L — дуга полукубической параболы $y^2 = 4x^3/9$, соединяющая точки $O(0;0)$ и $A(3;2\sqrt{3})$.

14. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные интегралы

14.3.16. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (y-x)dl$, если L — ломаная ABC , соединяющая точки $A(0;2)$, $B(1;2)$, $C(3;4)$.

14.3.17. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L ydl$, если L — часть дуги астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0; \pi/2]$.

14.3.18. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \sqrt{8y^3} dl$, если L — половина арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0; \pi]$.

14.3.19. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+y)dx + xdy$, если L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(-1;3)$ и $B(1;-1)$.

14.3.20. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L y^2 dx + (xy-y)dy$, если L — дуга параболы $y^2 = 4x$, соединяющий точки $O(0;0)$ и $B(1;2)$.

14.3.21. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L y^2 dx + 2xdy$, если L — ломаная ABC , соединяющая точки $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$.

14.3.22. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^3 dy + y^3 dx$, если L — часть дуги окружности $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{12}\right]$.

14.3.23. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L \frac{xdy}{x^2+y^2} - \frac{ydx}{x^2+y^2}$, если L — окружность радиуса 1 с центром в точке $C(2;1)$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

14.3.24. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L (x - 2y)dx + (2x - y)dy$, если L — контур трапеции с вершинами $O(0;0)$, $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(4;0)$ пробегаемый против хода часовой стрелки.

Ответы

14.3.1. $8\sqrt{5}$.

14.3.2. $\sqrt{10}$.

14.3.3. 7.

14.3.4. 18.

14.3.5. 4.

14.3.6. 8π .

14.3.7. 8.

14.3.8. 18.

14.3.9. 18.

14.3.10. 0,5.

14.3.11. 2π .

14.3.12. 0.

14.3.13. $9\sqrt{10}$.

14.3.14. $40\sqrt{5}$.

14.3.15. 56.

14.3.16. $1,5 + 2\sqrt{2}$.

14.3.17. 0,6.

14.3.18. 6π .

14.3.19. 2.

14.3.20. 1.

14.3.21. 8.

14.3.22. 0,25.

14.3.23. 0.

14.3.24. 24.

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

15.1. Комплексные числа. Арифметические операции над ними. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Извлечение корней из комплексных чисел

1°. *Комплексным числом* z называется выражение вида $z = a + bi$, где a, b — действительные числа, i — мнимая единица, $i^2 = -1$.

Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число b — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Im} z$, т. е. $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е. $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*.

2°. Для сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ применяются формулы:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

3°. Любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M(a; b)$ плоскости xOy такой, что $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Плоскость xOy , на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной*, а оси абсцисс и ординат называются соответственно *действительной* и *мнимой*.

Также всякое комплексное число $z = a + bi$ на комплексной плоскости можно изобразить радиус-вектором $\overline{OM} = \{a; b\}$. Длина этого вектора $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается через $|z|$, а угол φ между вектором $\overline{OM}$ и осью абсцисс называется *аргументом* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $\arg z$, т. е. $|z| = r$, а $\arg z = \varphi$. Тогда

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Представление комплексного числа $z = a + bi$ в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $\varphi = \arg z$, называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

При переходе к тригонометрической форме, учитывая, что $-\pi < \arg z \leq \pi$, применяются формулы:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей;} \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} & \text{для внутренних точек II четверти;} \\ -\pi + \arctg \frac{b}{a} & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если число $z = a + bi$ изображается точкой, которая принадлежит действительной или мнимой оси комплексной плоскости, то $\arg z$ определяется непосредственно по рисунку.

4°. Для умножения и деления комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ применяются формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

15. Элементы теории функций комплексного переменного

Для возведения в n -ю степень и извлечения корня n -й степени из комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $n \in \mathbb{N}$ применяются формулы:

$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ — формула Муавра;

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

5°. Представление комплексного числа $z = a + bi$ в виде $z = re^{i\varphi}$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $\varphi = \arg z$, называется *показательной формой* комплексного числа.

Над комплексными числами, представленными в показательной форме, легко производить операции умножения, деления и возведения в степень.

Задачи для решения на практическом занятии

15.1.1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Найти:

- 1) $z_1 + z_2$;
- 2) $3z_1 - z_2$;
- 3) $z_1 \cdot z_2$;
- 4) z_1^2 ;
- 5) z_1/z_2 ;
- 6) z_2/z_1 ;
- 7) $(i + z_2)/(z_1 - 1)$.

15.1.2. Вычислить:

- 1) i^3 ;
- 2) i^4 ;
- 3) i^{14} ;
- 4) i^{133} ;
- 5) $1/i$;
- 6) $(1-i)/i^3$;
- 7) $(1-i)^5/(1+i)^3$.

15.1.3. Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа:

1) $z_1 = 1 - 2i$;

2) $z_2 = -3 + 4i$;

3) $z_3 = 2i$;

4) $z_4 = -1$.

15.1.4. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) 1;

2) $-2i$;

3) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;

4) $-1 - \sqrt{3}i$;

5) $\sqrt{3} - i$;

6) $-\sqrt{2}/(1+i)$.

15.1.5. Даны комплексные числа $z_1 = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ и

$z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$. Найти:

1) $z_1 \cdot z_2$;

2) z_1/z_2 ;

3) z_1^3 .

15.1.6. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt{i}$;

2) $\sqrt[3]{1}$;

3) $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$.

15.1.7. Решить уравнения:

1) $z^3 = \frac{8\sqrt{2}}{1-i}$;

2) $z^4 = \frac{2}{\sqrt{3}+i}$.

Задачи для домашнего задания

15.1.8. Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = 3 + i$. Найти:

- 1) $z_1 + z_2$;
- 2) $2z_1 - 3z_2$;
- 3) $z_1 \cdot z_2$;
- 4) z_2^2 ;
- 5) z_1/z_2 ;
- 6) z_2/z_1 ;
- 7) $(iz_1)/(z_2 - 2)$.

15.1.9. Вычислить:

- 1) i^5 ;
- 2) i^6 ;
- 3) i^{23} ;
- 4) i^{112} ;
- 5) $1/i^3$;
- 6) $(1+i)/i^3$;
- 7) $(1+i)^6/(1-i)^4$.

15.1.10. Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа:

- 1) $z_1 = 2 + i$;
- 2) $z_2 = -1 - 3i$;
- 3) $z_3 = -i$;
- 4) $z_4 = 2$.

15.1.11. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

- 1) i ;
- 2) -2 ;

3) $\sqrt{3} + i$;

4) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;

5) $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$;

6) $2/(-1 + \sqrt{3}i)$.

15.1.12. Даны комплексные числа $z_1 = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ и

$z_2 = 8\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$. Найти:

1) $z_1 \cdot z_2$;

2) z_2/z_1 ;

3) z_1^4 .

15.1.13. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt{-4i}$;

2) $\sqrt[4]{-1}$;

3) $\sqrt[3]{0,5(-\sqrt{3} + i)}$.

15.1.14. Решить уравнения:

1) $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{-1-i}$;

2) $z^5 = \frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$.

Ответы

15.1.1. 1) $4 - 2i$; 2) $10i$; 3) $11 + 2i$; 4) $-3 + 4i$; 5) $-0,2 + 0,4i$;
6) $-1 - 2i$; 7) $-1,5 - 1,5i$.

15.1.2. 1) $-i$; 2) 1 ; 3) -1 ; 4) i ; 5) $-i$; 6) $1 + i$; 7) 2 .

15.1.3. 1) $M_1(1; -2)$; 2) $M_2(-3; 4)$; 3) $M_3(0; 2)$; 4) $M_4(-1; 0)$.

15.1.4. 1) $\cos 0 + i \sin 0$, e^{i0} ;

2) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$;

$$3) 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$4) 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right), 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)};$$

$$5) 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$6) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right), e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}.$$

$$15.1.5. 1) -8i; 2) \sqrt{3}-i; 3) 8i.$$

$$15.1.6. 1) \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}; 2) 1, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; 3) \sqrt{3}-i, 1+\sqrt{3}i, -\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i.$$

$$15.1.7. 1) 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right), 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$2\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right); 2) \cos\left(\frac{-\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{24}\right),$$

$$\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}, \cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24},$$

$$\cos\frac{35\pi}{24}+i\sin\frac{35\pi}{24}.$$

$$15.1.8. 1) 7-2i; 2) -1-9i; 3) 15-5i; 4) 8+6i; 5) 0,9-1,3i;$$

$$6) 0,36+0,52i; 7) 3,5+0,5i.$$

$$15.1.9. 1) i; 2) -1; 3) -i; 4) 1; 5) i; 6) -1+i; 7) 2i.$$

$$15.1.10. 1) M_1(2;1); 2) M_2(-1;-3); 3) M_3(0;-1); 4) M_4(2;0).$$

$$15.1.11. 1) \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, e^{i\frac{\pi}{2}}; 2) 2(\cos \pi + i \sin \pi), 2e^{i\pi};$$

$$3) 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right); 2e^{i\frac{\pi}{6}};$$

$$4) 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)};$$

$$5) 4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)};$$

$$6) \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right), e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}.$$

$$15.1.12. 1) -16\sqrt{3} + 16i; 2) -2i; 3) -128 + 128\sqrt{3}i.$$

$$15.1.13. 1) \sqrt{2} - i\sqrt{2}, -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; 2) \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; 3) \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right),$$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{18}\right), \cos\left(\frac{29\pi}{18}\right) + i \sin\left(\frac{29\pi}{18}\right).$$

$$15.1.14. 1) 2\left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \sin \frac{3\pi}{16}\right), 2\left(\cos \frac{11\pi}{16} + i \sin \frac{11\pi}{16}\right),$$

$$2\left(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16}\right), 2\left(\cos \left(\frac{27\pi}{16}\right) + i \sin \left(\frac{27\pi}{16}\right)\right);$$

$$2) \cos\left(\frac{-2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{15}\right), \cos \frac{4\pi}{15} + i \sin \frac{4\pi}{15},$$

$$\cos \frac{10\pi}{15} + i \sin \frac{10\pi}{15}, \cos \frac{16\pi}{15} + i \sin \frac{16\pi}{15},$$

$$\cos \frac{22\pi}{15} + i \sin \frac{22\pi}{15}.$$

15.2. Функции комплексного переменного.

Производная функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Отображения точек и линий с помощью аналитической функции

1°. Пусть даны два непустых множества Z и Ω , элементами которых являются комплексные числа. Соответствие f , которое для каждого элемента $z = x + yi$ из множества Z определяет один или несколько элементов $\omega = u + vi$ из множества Ω , называется *функцией комплексного переменного* и записывается $\omega = f(z)$. Множество Z называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех ω , принадлежащих Ω , называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

Функция $\omega = f(z)$ называется *однозначной*, если соответствие f для каждого значения z из множества Z определяет только одно значение ω из множества Ω ; если же существует хотя бы одно значение z , которому соответствуют несколько значений ω , то функция $\omega = f(z)$ называется *многозначной*.

Так как $\omega = u + vi$, то $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$, где $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ — действительная часть функции $f(z)$, а $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ — мнимая часть функции $f(z)$.

2°. Производной $f'(z)$ однозначной функции комплексного переменного $\omega = f(z)$ называется предел, если он существует,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

а функция $\omega = f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z .

Однозначная функция комплексного переменного $\omega = f(z)$, которая имеет конечную производную в каждой точке области D , называется *аналитической* в области D .

Условия Коши–Римана (необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного). Если функция $\omega = f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + yi$ и функции действительного

переменного $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы в точке $M(x; y)$, то для дифференцируемости функции $\omega = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в точке $M(x; y)$ выполнялись равенства:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}.$$

Производная функции комплексного переменного $\omega = f(z)$ выражается через частные производные функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$ по формулам:

$$f'(z) = u'_x + v'_y i = u'_x - u'_y i = v'_y - u'_y i = v'_y + v'_x i.$$

Для нахождения производных от элементарных функций комплексного переменного применяются формулы и правила дифференцирования, что и для функций действительного аргумента.

3°. Если для каждого значения $z = x + yi$ аналитическая в области D функция $\omega = f(z)$ определяет единственное значение $\omega = u + vi$, то каждой точке $M(x; y)$ плоскости xOy соответствует определенная точка $M_1(u; v)$ на плоскости uOv . Если точка $M(x; y)$ плоскости xOy описывает некоторую линию Γ , расположенную в области D , то точка $M_1(u; v)$ на плоскости uOv опишет линию Γ_1 , которая называется *отображением* линии Γ на плоскость uOv с помощью аналитической функции $\omega = f(z)$.

Задачи для решения на практическом занятии

15.2.1. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1) $\omega = z^2 - 1$;

2) $\omega = i\bar{z} - z$;

3) $\omega = z^3 + 2i$;

4) $\omega = \frac{1}{z}$;

5) $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$.

15. Элементы теории функций комплексного переменного

15.2.2. Дана функция $\omega = z^2 - iz$. Найти значение функции в точке z_0 :

1) $z_0 = -1 + i$;

2) $z_0 = 2 + i$;

3) $z_0 = 3 - 2i$.

15.2.3. Дана функция $\omega = f(z)$. Найти значение производной функции в точке $z_0 = 1 - 2i$:

1) $\omega' = z^2 - 2z + 3i$;

2) $\omega = iz^3 + 2z^2 + iz$;

3) $\omega = \frac{2z + i}{z - 1}$.

15.2.4. Дана функция $f(z) = (x^2 + x - y^2) + (2xy + y)i$. Проверить, является ли данная функция дифференцируемой. В случае положительного ответа найти ее производную.

15.2.5. Дана действительная часть $u(x; y) = 2xy - y$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x + yi$. Найти функцию $f(z)$, если $f(0) = i$.

15.2.6. Дана мнимая часть $v(x; y) = x^2 - y^2 + y$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x + yi$. Найти функцию $f(z)$, если $f(0) = -3$.

15.2.7. Изобразить область, заданную неравенствами:

1) $|z + 1| < 2, \operatorname{Re} z \geq 0$;

2) $|z - i| \geq 2, \operatorname{Im} z > 2$;

3) $|z + 1 - i| < 2, -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$;

4) $|z - 1 + 2i| \leq 3, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > -3$;

5) $|z - 2i| > 1, |\operatorname{Re} z| \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$.

15.2.8. С помощью функции $\omega = f(z)$ отобразить на плоскость uOv треугольник OAB , если $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(0; 1)$.

1) $f(z) = 2z - 1$;

2) $f(z) = z^2$;

3) $f(z) = 2z^2 + 1$.

Задачи для домашнего задания

15.2.9. Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1) $\omega = z^2 + i$;

2) $\omega = iz + \bar{z}$;

3) $\omega = z^3 - 2 + i$;

4) $\omega = \frac{i}{\bar{z}}$;

5) $\omega = \frac{z}{\bar{z}}$.

15.2.10. Дана функция $\omega = iz^2 - 2z$. Найти значение функции в точке z_0 :

1) $z_0 = 1 - i$;

2) $z_0 = 2 + i$;

3) $z_0 = 3 + 2i$.

15.2.11. Дана функция $\omega = f(z)$. Найти значение производной функции в точке $z_0 = -1 + 2i$:

1) $\omega = z^2 + 2z - i$;

2) $\omega = z^3 - 2iz^2 + z$;

3) $\omega = \frac{2z - i}{z + 1}$.

15.2.12. Дана функция $f(z) = (x^2 - x - y^2) + (2xy - y - 1)i$. Проверить, является ли данная функция дифференцируемой. В случае положительного ответа найти ее производную.

15.2.13. Дана действительная часть $u(x, y) = x + 2y$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x + yi$. Найти функцию $f(z)$, если $f(0) = 2i$.

15.2.14. Дана мнимая часть $v(x, y) = x^2 - y^2 - 2x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x + yi$. Найти функцию $f(z)$, если $f(0) = 2$.

15.2.15. Изобразить область, заданную неравенствами:

1) $|z + i| < 2, \operatorname{Im} z \leq 0$;

2) $|z - 1| \geq 2, \operatorname{Re} z > 2$;

3) $|z - 1 + i| \leq 2, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$;

$$4) |z + 2 - i| < 3, \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \leq 2;$$

$$5) |z - 2i| > 1, -1 < \operatorname{Re} z < 2, |\operatorname{Im} z| < 3.$$

15.2.16. С помощью функции $\omega = f(z)$ отобразить на плоскость uOv треугольник OAB , если $O(0; 0)$, $A(-1; 2)$, $B(-1; 0)$.

$$1) f(z) = -2z + 1;$$

$$2) f(z) = iz^2;$$

$$3) f(z) = 2\bar{z}^2 - i.$$

Ответы

$$15.2.1. 1) \operatorname{Re} z = x^2 - y^2 - 1, \operatorname{Im} z = 2xy; 2) \operatorname{Re} z = y - x,$$

$$\operatorname{Im} z = x - y; 3) \operatorname{Re} z = x^3 - 3xy^2, \operatorname{Im} z = 3x^2y - y^3 + 2;$$

$$4) \operatorname{Re} z = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} z = \frac{-y}{x^2 + y^2}; 5) \operatorname{Re} z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}.$$

$$15.2.2. 1) 1 - i; 2) 4 + 2i; 3) 3 - 15i.$$

$$15.2.3. 1) -4i; 2) 16 - 16i; 3) 0,5 + 0,25i.$$

$$15.2.4. f'(z) = 2z + 1.$$

$$15.2.5. f(z) = 2xy - y + i(-x^2 + x + y^2 + 1).$$

$$15.2.6. f(z) = -2xy + x - 3 + i(x^2 - y^2 + y).$$

15.2.7. 1) часть открытого круга радиуса 2 с центром в точке $C(-1; 0)$, расположенная справа от прямой $x = 0$ (включая точки прямой); 2) часть плоскости, ограниченная прямой $y = 2$ (не включая точки прямой) и окружностью радиуса 2 с центром в точке $C(0; 1)$ (включая точки окружности), расположенная выше прямой и окружности; 3) часть открытого круга радиуса 2 с центром в точке $C(-1; 1)$, расположенная между прямыми $x = -2$ и $x = 0$ (включая точки прямых); 4) часть замкнутого круга радиуса 3 с центром в точке $C(1; -2)$, ограниченная прямыми $x = 0$ и $y = -3$ (не включая точки прямых),

содержащая точку $C(1; -2)$; 5) часть замкнутого квадрата, ограниченного прямыми $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 4$, из которого исключен открытый круг радиуса 1 с центром в точке $C(0; 2)$.

15.2.8. 1) $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(-1; 0)$, $A_1(3; 2)$, $B_1(-1; 2)$,

$$O_1 A_1 : u = 2v - 1, O_1 B_1 : u = -1, A_1 B_1 : v = 2;$$

2) криволинейный $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(0; 0)$, $A_1(3; 4)$, $B_1(-1; 0)$,

$$O_1 A_1 : u = \frac{3v}{4}, O_1 B_1 : v = 0, A_1 B_1 : u = \frac{v^2}{4} - 1;$$

3) криволинейный $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(1; 0)$, $A_1(7; 8)$, $B_1(-1; 0)$,

$$O_1 A_1 : u = \frac{3v}{4} + 1, O_1 B_1 : v = 0, A_1 B_1 : u = \frac{v^2}{8} - 1.$$

15.2.9. 1) $\operatorname{Re} z = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} z = 2xy + 1$;

2) $\operatorname{Re} z = x - y$, $\operatorname{Im} z = x - y$;

3) $\operatorname{Re} z = x^3 - 3xy^2 - 2$, $\operatorname{Im} z = 3x^2y - y^3 + 1$;

$$4) \operatorname{Re} z = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} z = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$5) \operatorname{Re} z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

15.2.10. 1) $2i$; 2) $-8 + i$; 3) $-18 + i$.

15.2.11. 1) $4i$; 2) $-8i$; 3) $-0,5 - 0,25i$.

15.2.12. $f'(z) = 2z - 1$.

15.2.13. $f(z) = x + 2y + i(y - 2x + 2)$.

15.2.14. $f(z) = -2xy + 2y + 2 + i(x^2 - y^2 - 2x)$.

15.2.15. 1) часть открытого круга радиуса 2 с центром в точке $C(0; -1)$, расположенная ниже прямой $y = 0$ (включая точки прямой); 2) часть плоскости, ограниченная прямой $x = 2$ (не включая точки прямой) и окружностью радиуса 2 с центром в точке $C(1; 0)$ (включая точки окружности), расположенная правее прямой и

окружности; 3) часть замкнутого круга радиуса 2 с центром в точке $C(1; -1)$, расположенная между прямыми $x = 0$ и $x = 2$ (включая точки прямых); 4) часть открытого круга радиуса 3 с центром в точке $C(-2; 1)$, ограниченного прямыми $x = 0$ и $y = 2$, включая точки прямых, содержащая точку $C(-2; 1)$; 5) часть открытого прямоугольника, ограниченного прямыми $x = -1$, $x = 2$, $y = -3$, $y = 3$, из которого исключен открытый круг радиуса 1 с центром в точке $C(0; 2)$.

15.2.16. 1) $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(1; 0), A_1(3; -4), B_1(3; 0)$,

$$O_1 A_1 : u = -0,5v + 1, O_1 B_1 : v = 0, A_1 B_1 : u = 3;$$

2) криволинейный $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(0; 0), A_1(4; -3), B_1(0; 1)$,

$$O_1 A_1 : u = \frac{-4v}{3}, O_1 B_1 : u = 0, A_1 B_1 : v = 1 - \frac{u^2}{4};$$

3) криволинейный $\Delta O_1 A_1 B_1 : O_1(0; -1), A_1(-6; 7)$,

$$B_1(2; -1), O_1 A_1 : v = \frac{-4u}{3} - 1, O_1 B_1 : v = -1,$$

$$A_1 B_1 : u = 2 - \frac{(v+1)^2}{8}.$$

15.3. Интегрирование функции комплексного переменного

1°. Кривая Γ , которая имеет непрерывно изменяющуюся касательную, называется *гладкой*. Кривая Γ , состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*.

Пусть Γ — гладкая кривая, а функция комплексного переменного $f(z) = u(x; y) + v(x; y)i$ — непрерывна и однозначна в области D , которая содержит кривую Γ , то интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ можно вычислить как сумму двух криволинейных интегралов от функций действительного переменного по формуле

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая, состоящая из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, то интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ равен сумме интегралов

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_k} f(z)dz.$$

Замечания: 1. Если кривая Γ задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a; b]$, то криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле:

$$\int_{\Gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; \varphi(x)) + Q(x; \varphi(x)) \cdot \varphi'(x))dx.$$

2. Если кривая Γ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле:

$$\int_{\Gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t)) \cdot y'(t))dt.$$

2°. Если часть области D , ограниченная любым замкнутым контуром, лежащим в этой области, полностью принадлежит области D , то область D называется *односвязной*, т. е. односвязная область не содержит «дыр».

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в односвязной области D , то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ , принадлежащему этой области, равен нулю, т. е. $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в односвязной области D , то интеграл от этой функции, взятый по любой кусочно-гладкой кривой Γ , определяется лишь начальной точкой z_0 и конечной точкой z этой кривой, а для его вычисления можно использовать формулу

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{z_0}^z f(z)dz = F(z_0) - F(z),$$

15. Элементы теории функций комплексного переменного

где функция $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$. Для вычисления интегралов от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности используются табличные формулы для нахождения интегралов от функций действительного переменного.

3°. **Интегральная формула Коши.** Если функция $f(z)$ есть аналитическая функция в односвязной области G и замкнутый кусочно-гладкий контур Γ — граница области D , причем область D включена в область G , то значение функции $f(z)$ в произвольной точке $z_0 \in D$ вычисляются по формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется *интегралом Коши*.

Следствие. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям интегральной формулы Коши, то значение производной n -го порядка функции $f(z)$ в произвольной точке $z_0 \in D$ вычисляются по формуле

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Приведенные формулы используются для вычисления интегралов по замкнутым контурам. Для этого их представляют в следующем виде

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0); \quad \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Если каждая из k замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ лежит вне остальных кривых и все они расположены внутри замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ , то множество точек комплексной плоскости, лежащих одновременно внутри Γ и вне $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ образуют $k+1$ — связную область D , т. е. $k+1$ — связная область — это область с k «дырами». Пусть функция $f(z)$ — аналитическая функция в $k+1$ — связной области D , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Задачи для решения на практическом занятии

15.3.1. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 0$ и $z_B = 1 - 2i$.

15.3.2. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \operatorname{Im} \bar{z} dz$, где Γ — часть окружности, заданная условиями: $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi/2$.

15.3.3. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$, где $f(z) = (y+2) - xi$, а Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 0$ и $z_B = 2i$.

15.3.4. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$, где $f(z) = (y - x^2 + 1) + 3yi$, а Γ — часть параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_A = 0$ и $z_B = 2 + 4i$.

15.3.5. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (2z - 1) dz$, где Γ — часть параболы, соединяющая точки $z_A = i$ и $z_B = -3 + i$.

15.3.6. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \bar{z} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением $|z| = 2$.

15.3.7. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + 4iz}{z + 2i} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением:

$$1) |z - 2 + i| = 3;$$

$$2) |z - 2 - i| = 3.$$

15.3.8. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 4}{(z - 2)^3} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением:

$$1) |z| = 1;$$

$$2) |z| = 4.$$

15. Элементы теории функций комплексного переменного

15.3.9. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{2i}{z^2 + 1} dz$, где Γ — окружность,

заданная уравнением:

1) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$;

2) $|z - 2| = 5$.

15.3.10. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{z + 4i + 1}{z^2 + (2i - 1)z - 2i} dz$, где Γ —

окружность, заданная уравнением:

1) $|z + 1 - i| = 3$;

2) $|z + 1 - i| = 4$.

Задачи для домашнего задания

15.3.11. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (\operatorname{Im} z)^2 dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 0$ и $z_B = 1 + 3i$.

15.3.12. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \operatorname{Im}(\bar{z})^2 dz$, где Γ — часть окружности, заданная условиями: $|z| = 3$, $\pi/2 \leq \arg z \leq \pi$.

15.3.13. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$, где, а Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = -2i$ и $z_B = 4$.

15.3.14. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$, где $f(z) = (2y - x^2) - xi$, а Γ — часть параболы $y = x^2 + 1$, соединяющая точки $z_A = i$ и $z_B = 1 + 2i$.

15.3.15. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} (3z^2 + 3i) dz$, где Γ — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1 - i$ и $z_B = 2i$.

15.3.16. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} (\bar{z} + 2z) dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением $|z| = 1$.

15.3.17. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{z^2 + 4}{z - 2} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением:

1) $|z + 2 - i| = 3$;

2) $|z - 1 + i| = 3$.

15.3.18. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{z^4 - iz^3}{(z - 2i)^4} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением:

1) $|z| = 1$;

2) $|z| = 4$.

15.3.19. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{3z + 2}{z^2 - 4} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением:

1) $|z + 1 + i| = 2$;

2) $|z + i| = 4$.

15.3.20. Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma} \frac{2z^2 - 6iz + 2}{z^3 + iz^2 + 2z} dz$, где Γ — окружность, заданная уравнением $|z - 1| = 3$.

Ответы

15.3.1. $0,5 - i$.

15.3.2. $0,25(\pi - 2i)$.

15.3.3. $6i$.

15.3.4. $-22 + 12i$.

15. Элементы теории функций комплексного переменного

15.3.5. $12 - 6i$.

15.3.6. $8\pi i$.

15.3.7. 1) $8\pi i$; 2) 0.

15.3.8. 1) 0; 2) $12\pi i$.

15.3.9. 1) $2\pi i$; 2) 0.

15.3.10. 1) $4\pi i$; 2) $2\pi i$.

15.3.11. $3 + 9i$.

15.3.12. $-18(1 + i)$.

15.3.13. $2 + 6i$.

15.3.14. $3 + 2i$.

15.3.15. $-7 - 9i$.

15.3.16. $2\pi i$.

15.3.17. 1) 0; 2) $16\pi i$.

15.3.18. 1) 0; 2) -14π .

15.3.19. 1) $2\pi i$; 2) $6\pi i$.

15.3.20. $4\pi i$.

16. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

16.1. Элементы теории множеств

1°. Понятие множества принадлежит к числу первичных понятий в математике, не определяемых через более простые понятия. Под *множеством* понимается совокупность (собрание, набор, семейство) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множества принято обозначать заглавными буквами $A, B, \dots, X, Y, \dots$, а их элементы — малыми $a, b, \dots, x, y, \dots$. Если элемент x принадлежит множеству X , то используется запись $x \in X$; в противном случае используется запись $x \notin X$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$. Множество задается либо перечислением всех его элементов, либо указанием свойства, которым обладают элементы множества.

2°. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subset B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B . Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств: $C = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $D = A \cap B$, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A , и множеству B : $D = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

16. Дискретная математика и элементы математической логики

Разностью множеств A и B называется множество $E = A \setminus B$, состоящее из элементов множества A , которые не принадлежат множеству B : $E = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Декартово произведение n равных множеств A будет называться n -й *декартовой степенью* множества A и обозначаться A^n .

3°. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Известны числовые множества:

$N = \{1; 2; 3; \dots\}$ — множество натуральных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ — множество целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{n}{m} : n \in Z, m \in N \right\}$ — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Задачи для решения на практическом занятии

16.1.1. Задать множества перечислением их элементов:

1) $A = \{x \in N : x \leq 5\}$;

2) $B = \{x \in N : x < 0\}$;

3) $C = \{x \in Z : -2 \leq x < 3\}$;

4) $D = \{x \in Z : |x| < 2\}$;

5) $E = \{x \in Q : 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$;

6) $F = \{x \in R : x^2 = 7\}$.

16.1.2. Составить множество B всех подмножеств множества A :

1) $A = \emptyset$;

2) $A = \{a\}$;

3) $A = \{1; 2\}$;

4) $A = \{a; b; c\}$.

16.1.3. Дано множество $X = \{1; 2; 3; 4\}$. Определить, какое из следующих утверждений является верным:

- 1) $1 \subset X$;
- 2) $1 \in X$;
- 3) $0 \notin X$;
- 4) $\{1\} \subset X$;
- 5) $\{1\} \in X$.

16.1.4. Даны множества $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{3; 4; 5; 6; 8\}$.

Найти:

- 1) $A \cup B$;
- 2) $A \cap B$;
- 3) $A \setminus B$;
- 4) $B \setminus A$.

16.1.5. Даны множества $A = \{x \in R : -4 \leq x < 3\}$ и $B = \{x \in R : 2 \leq x < 5\}$. Найти:

- 1) $A \cup B$;
- 2) $A \cap B$;
- 3) $A \setminus B$;
- 4) $B \setminus A$.

16.1.6. Множества A и B заданы как два пересекающихся круга. На рисунке указать:

- 1) $A \cup B$;
- 2) $A \cap B$;
- 3) $A \setminus B$;
- 4) $B \setminus A$.

16.1.7. Множества A, B, C заданы как три пересекающихся круга, имеющих общую часть. На рисунке указать:

- 1) $(A \cup B) \setminus C$;
- 2) $(A \cap C) \setminus B$;
- 3) $(A \setminus B) \cap C$;
- 4) $(B \setminus A) \setminus C$.

16.1.8. Множества A, B, C заданы как три пересекающихся круга, имеющих общую часть. На рисунке показать, что $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

16. Дискретная математика и элементы математической логики

16.1.9. Даны два множества $A = \{1; 2\}$ и $B = \{a; b; c\}$. Найти декартовы произведения этих множеств:

1) $A \times B$;

2) $B \times A$.

16.1.10. Даны два множества $A = \{1; 2\}$ и $B = \{a; b; c\}$. Найти декартовы квадраты этих множеств:

1) A^2 ;

2) B^2 .

Задачи для домашнего задания

16.1.11. Задать множества перечислением их элементов:

1) $A = \{x \in N : -3 \leq x < 5\}$;

2) $B = \{x \in N : x^2 < 1\}$;

3) $C = \{x \in Z : x^2 < 7\}$;

4) $D = \{x \in Z : |x| \leq 1\}$;

5) $E = \{x \in Q : x^2 = 8\}$;

6) $F = \{x \in R : x^2 - 2x - 1 = 0\}$.

16.1.12. Составить множество D всех подмножеств множества C :

1) $C = \{2\}$;

2) $C = \{a; b\}$;

3) $C = \{2; 4; 6\}$.

16.1.13. Дано множество $X = \{1; 2; 3; 4\}$. Определить, какое из следующих утверждений является верным:

1) $\{1; 2\} \subset X$;

2) $\{1; 2\} \in X$;

3) $\{2\} \notin X$;

4) $\{1; 2; 3; 4\} \subset X$;

5) $\{1; 2; 3; 4\} \in X$.

16.1.14. Даны множества $C = \{a; b; c; d\}$ и $D = \{b; c; d; e; f\}$.

Найти:

1) $C \cap D$;

2) $C \cup D$;

3) $D \setminus C$;

4) $C \setminus D$.

16.1.15. Даны множества $A = \{x \in R : 1 < x \leq 5\}$ и $B = \{x \in R : -2 < x < 3\}$. Найти:

- 1) $A \cup B$;
- 2) $A \cap B$;
- 3) $A \setminus B$;
- 4) $B \setminus A$.

16.1.16. Множество A — множество положительных четных чисел, множество B — множество положительных нечетных чисел. Найти:

- 1) $A \cup B$;
- 2) $A \cap B$.

16.1.17. Заданы множества A, B, C как три пересекающихся круга, имеющие одну общую часть. На рисунке указать:

- 1) $(A \cup B) \cap C$;
- 2) $(A \cap B) \setminus C$;
- 3) $(A \setminus B) \setminus C$;
- 4) $(B \cap A) \cup C$.

16.1.18. Заданы множества A, B, C как три пересекающихся круга, имеющие одну общую часть. На рисунке показать, что $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

16.1.19. Даны два множества — $C = \{p; m; n\}$ и $D = \{a; b\}$. Найти декартовы произведения этих множеств:

- 1) $D \times C$;
- 2) $C \times D$.

16.1.20. Даны два множества — $C = \{p; m; n\}$ и $D = \{a; b\}$. Найти декартовы квадраты этих множеств:

- 1) C^2 ;
- 2) D^2 .

Ответы

- 16.1.1. 1) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$; 2) $\emptyset$; 3) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; 4) $\{-1; 0; 1\}$;
5) $\{0, 5; 1\}$; 6) $\{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

- 16.1.2. 1) $\{\emptyset\}$; 2) $\{\emptyset; \{a\}\}$; 3) $\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$;
 4) $\{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$.
- 16.1.3. 1) неверно; 2) верно; 3) верно; 4) верно; 5) неверно.
- 16.1.4. 1) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; 2) $\{3; 4; 5\}$; 3) $\{1; 2\}$; 4) $\{6; 8\}$.
- 16.1.5. 1) $\{x \in R: -4 \leq x < 5\}$; 2) $\{x \in R: 2 \leq x < 3\}$;
 3) $\{x \in R: -4 \leq x < 2\}$; 4) $\{x \in R: 3 \leq x < 5\}$.
- 16.1.9. 1) $\{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$;
 2) $\{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$.
- 16.1.10. 1) $\{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}$; 2) $\{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$.
- 16.1.11. 1) $\{1; 2; 3; 4\}$; 2) $\emptyset$; 3) $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$; 4) $\{-1; 0; 1\}$; 5) $\emptyset$;
 6) $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.
- 16.1.12. 1) $\{\emptyset; \{2\}\}$; 2) $\{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$;
 3) $\{\emptyset; \{2\}; \{4\}; \{6\}; \{2; 4\}; \{2; 6\}; \{4; 6\}; \{2; 4; 6\}\}$.
- 16.1.13. 1) верно; 2) неверно; 3) верно; 4) верно; 5) неверно.
- 16.1.14. 1) $\{b; c; d\}$; 2) $\{a; b; c; d; e; f\}$; 3) $\{e; f\}$; 4) $\{a\}$.
- 16.1.15. 1) $\{x \in R: -2 < x \leq 5\}$; 2) $\{x \in R: 1 < x < 3\}$;
 3) $\{x \in R: 3 \leq x \leq 5\}$; 4) $\{x \in R: -2 < x \leq 1\}$.
- 16.1.16. 1) N ; 2) $\emptyset$.
- 16.1.19. 1) $\{(a, p); (a, m); (a, n); (b, p); (b, m); (b, n)\}$;
 2) $\{(p, a); (p, b); (m, a); (m, b); (n, a); (n, b)\}$.
- 16.1.20. 1) $\{(p, p); (p, m); (p, n); (m, p); (m, m); (m, n); (n, p); (n, m); (n, n)\}$; 2) $\{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b)\}$.

16.2. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона. Элементы алгебры логики высказываний

1°. Группы, составленные из предметов какой-либо природы, называются *соединениями*. Предметы, из которых составлены соединения, называются *элементами*. Ниже рассмотрены основные типы соединений.

Перестановками из k элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит все k элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения. Общее число перестановок из k элементов обозначается P_k и вычисляется по формуле:

$$P_k = k!$$

Сочетаниями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит l элементов, взятых из числа данных k элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число сочетаний из k элементов по l в каждом обозначается C_k^l и вычисляется по формуле:

$$C_k^l = \frac{P_k}{P_l P_{k-l}} = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Размещениями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит l элементов, взятых из числа данных k элементов, и которые отличаются друг от друга или хотя бы одним элементом, или порядком их расположения. Общее число размещений из k элементов по l в каждом обозначается A_k^l и вычисляется по формуле:

$$A_k^l = k(k-1)(k-2)\dots(k-(l-1)) = \frac{k!}{(k-l)!}.$$

2°. *Бинам Ньютона* — это формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k .

Когда степень бинама невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. Этот треугольник имеет вид:

1
 1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
 1 6 15 20 15 6 1
 1 7 21 35 35 21 7 1

Напомним, что при вычислениях $0!$ принимается равным 1.

3°. *Высказыванием* называется предложение, к которому можно применить понятия «истинно» или «ложно». В математической логике не рассматривается сам смысл высказываний, определяется только его *истинность* или *ложность*, что принято обозначать соответственно **И** или **Л**.

Основные логические операции над высказываниями:

1) *отрицанием* высказывания P называется высказывание $\neg P$, которое истинно только тогда, когда высказывание P ложно;

P	$\neg P$
И	Л
Л	И

2) *конъюнкцией* двух высказываний P и Q называется высказывание $P \& Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания;

P	Q	$P \& Q$
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	Л

3) *дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны;

P	Q	$P \vee Q$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

4) *импликацией* двух высказываний P и Q называется высказывание $P \Rightarrow Q$, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а Q — ложно;

P	Q	$P \Rightarrow Q$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

5) эквивалентией двух высказываний P и Q называется высказывание $P \Leftrightarrow Q$, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	И

Задачи для решения на практическом занятии

16.2.1. Вычислить:

- 1) P_3 ;
- 2) C_6^3 ;
- 3) A_6^3 ;
- 4) $(P_{12} \cdot C_6^3) / (A_1^7 \cdot P_3)$.

16.2.2. Сколько трехзначных чисел можно образовать из цифр 4, 5, 7, 8, 9 при условии, что трехзначные числа не содержат одинаковых цифр?

16.2.3. Сколько различных слов можно образовать из букв А, Б, В, Г, Д, если под словом понимать любую комбинацию, состоящую из пяти неповторяющихся букв?

16.2.4. В цехе работают 15 рабочих. Из них случайным образом формируют звено, состоящее из 4 рабочих. Сколько различных звеньев можно сформировать из работающих в цехе рабочих?

16.2.5. В цехе работают 9 мужчин и 6 женщин. Из них случайным образом формируют группу, состоящую из трех человек. Сколько различных групп можно сформировать из работающих в цехе, если каждая группа должна состоять из:

- 1) трех мужчин;
- 2) двух мужчин и одной женщины;
- 3) одного мужчины и двух женщин;
- 4) не менее двух мужчин?

16.2.6. Представить данные выражения в виде многочленов по формуле бинома Ньютона:

- 1) $(x + y)^6$;
- 2) $(2x - y)^5$;
- 3) $(3x + y^2)^4$.

16. Дискретная математика и элементы математической логики

16.2.7. Даны два высказывания: P — «Анна — студентка университета», Q — «Анна играет в футбол». На языке логики высказываний записать следующие утверждения:

- 1) «Анна не играет в футбол»;
- 2) «Анна — не студентка университета или Анна играет в футбол»;
- 3) «Анна — студентка университета и Анна не играет в футбол»;
- 4) «если Анна — студентка университета, то Анна не играет в футбол».

16.2.8. Составить таблицу истинности для высказываний:

- 1) $R_1 = P \& (\neg Q)$;
- 2) $R_2 = (\neg P) \vee Q$;
- 3) $R_3 = P \vee (Q_1 \Leftrightarrow Q_2)$;
- 4) $R_4 = (P_1 \Rightarrow P_2) \& Q$.

Задачи для домашнего задания

16.2.9. Вычислить:

- 1) P_6 ;
- 2) C_7^4 ;
- 3) A_8^3 ;
- 4) $(A_{13}^8)/(C_{12}^7 \cdot P_3)$.

16.2.10. Сколько различных слов можно образовать из букв Б, В, Г, Д, Е, если под словом понимать любую комбинацию, состоящую из четырех неповторяющихся букв?

16.2.11. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 7, 6, 8, 9 при условии, что шестизначные числа состоят из различных цифр?

16.2.12. Из коробки, содержащей 12 ламп, наудачу выбирают 4 лампы. Сколько различных наборов ламп можно образовать из имеющихся ламп?

16.2.13. В коробке 12 ламп, среди которых — четыре негодных. Из этой коробки наудачу выбирают 4 лампы. Сколько различных

наборов ламп можно образовать из имеющихся ламп, если в наборе должны быть:

- 1) все годные лампы;
- 2) только три годные лампы;
- 3) более двух годных ламп;
- 4) не менее двух годных ламп?

16.2.14. Представить данные выражения в виде многочленов по формуле бинома Ньютона:

- 1) $(x-2)^7$;
- 2) $(2+3y)^6$;
- 3) $(2x^3-1)^5$.

16.2.15. Даны два высказывания: P — «Иван поет в хоре», Q — «Иван любит химию». На языке логики высказываний записать следующие утверждения:

- 1) «Иван не поет в хоре»;
- 2) «Иван не поет в хоре и Иван любит химию»;
- 3) «Иван не поет в хоре или Иван не любит химию»;
- 4) «если Иван любит химию, то Иван поет в хоре».

16.2.16. Составить таблицу истинности для высказываний:

- 1) $R_1 = P \vee (\neg Q)$;
- 2) $R_2 = (\neg P) \& Q$;
- 3) $R_3 = P \& (\neg Q_1 \Leftrightarrow Q_2)$;
- 4) $R_4 = (P_1 \Rightarrow \neg P_2) \vee Q$.

Ответы

16.2.1. 1) 120; 2) 20; 3) 120; 4) 48.

16.2.2. 60.

16.2.3. 120.

16.2.4. 1365.

16.2.5. 1) 84; 2) 216; 3) 135; 4) 300.

16.2.6. 1) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$;
2) $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$;
3) $81x^4 + 108x^3y^2 + 54x^2y^4 + 12xy^6 + y^8$.

16.2.7. 1) $R_1 = \neg Q$; 2) $R_2 = (\neg P) \vee Q$; 3) $R_3 = P \& (\neg Q)$; 4) $R_4 = P \Rightarrow \neg Q$.

16. Дискретная математика и элементы математической логики

16.2.8. 1)

P	Q	R_1
И	И	Л
Л	И	Л
И	Л	И
Л	Л	Л

2)

P	Q	R_2
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

3)

P	Q_1	Q_2	R_3
И	И	И	И
Л	И	И	И
И	Л	И	И
Л	Л	И	Л
И	И	Л	И
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И
Л	Л	Л	И

4)

P_1	P_2	Q	R_4
И	И	И	И
Л	И	И	И
И	Л	И	Л
Л	Л	И	И
И	И	Л	Л
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л

16.2.9. 1) 720; 2) 35; 3) 336; 4) 546.

16.2.10. 120.

16.2.11. 720.

16.2.12. 495.

16.2.13. 1) 70; 2) 224; 3) 294; 4) 462.

16.2.14. 1) $x^7 - 14x^6 + 84x^5 - 280x^4 + 560x^3 - 672x^2 + 448x - 128$;

2) $64 + 576y + 2160y^2 + 4320y^3 + 4860y^4 + 2916y^5 +$

$+ 729y^6$; 3) $32x^{15} - 80x^{12} + 80x^9 - 40x^6 + 10x^3 - 1$.

16.2.15. 1) $R_1 = \neg P$; 2) $R_2 = (\neg P) \& Q$; 3) $R_3 = (\neg P) \vee (\neg Q)$;

4) $R_4 = Q \Rightarrow P$.

16.2.16. 1)

P	Q	R_1
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	И
Л	Л	И

2)

P	Q	R_2
И	И	Л
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	Л

3)

P	Q_1	Q_2	R_3
И	И	И	Л
Л	И	И	Л
И	Л	И	И
Л	Л	И	Л
И	И	Л	И
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л

4)

P_1	P_2	Q	R_4
И	И	И	И
Л	И	И	И
И	Л	И	И
Л	Л	И	И
И	И	Л	Л
Л	И	Л	И
И	Л	Л	И
Л	Л	Л	И

16.3. Элементы теории графов

1°. *Графом* называется непустое множество точек и множество отрезков, оба конца которых принадлежат этому множеству точек. Точки — это *вершины* графа, а отрезки, соединяющие вершины, — *ребра* графа. Обычно граф обозначается буквой G , его вершины — заглавными буквами латинского алфавита, а ребра — парой букв, которыми обозначены принадлежащие этим ребрам вершины. В некоторых случаях вершины и ребра не обозначаются.

Замечания: 1. При изображении графов вершины обозначаются жирными точками, чтобы отличить их от точек пересечения ребер графа.

2. Существуют вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру графа. Такие вершины называются *изолированными*.

3. При изображении графов ребра могут быть прямолинейными или криволинейными отрезками произвольной длины. На рисунках 16.3.1–16.3.3 изображен один и тот же граф, имеющий 4 вершины и 4 ребра.

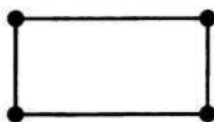


Рис. 16.3.1

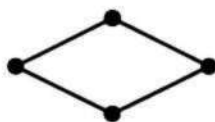


Рис. 16.3.2

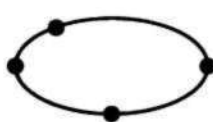


Рис. 16.3.3

2°. *Полным* называется граф, у которого каждые две различные вершины соединены одним и только одним ребром. Каждая вершина полного графа принадлежит одному и тому же числу ребер. Число ребер полного графа, который имеет n вершин, вычисляется по формуле $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Если граф не является полным, то его

можно преобразовать в полный граф, добавив недостающие вершины. Граф G , с теми же вершинами, что и граф G , и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу G , чтобы из него получился полный граф, называется *дополнением* графа G .

Число ребер графа, которым принадлежит данная вершина, называется *степенью* этой вершины. Вершина называется *четной*, если ее степень четна, и *нечетной*, если ее степень нечетна. Степень любой вершины полного графа всегда на единицу меньше числа его вершин.

Теорема 16.3.1. Во всяком графе сумма степеней всех его вершин равна удвоенному числу ребер графа.

Теорема 16.3.2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Теорема 16.3.3. Во всяком графе, число вершин которого не менее двух, всегда найдутся по меньшей мере две вершины с одинаковыми степенями.

Теорема 16.3.4. Если в графе с n вершинами ($n > 2$) только две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется или только одна вершина степени 0, или только одна вершина степени $n - 1$.

3°. *Путем* в графе от вершины A_1 (начало пути) до вершины A_n (конец пути) называется последовательность ребер графа, соединяющая вершину A_1 с вершиной A_n , в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и ни одно из ребер не встречается более одного раза. *Циклом* в графе называется путь, в котором совпадают начало пути и конец пути. Путь (цикл) в графе называется *простым*, если он не проходит ни через одну вершину графа более одного раза. *Длиной* пути (цикла) называется число ребер этого пути (цикла).

Две вершины A и B данного графа называются *связными* (*несвязными*), если в графе существует (не существует) путь, начало и конец

которого совпадают с этими вершинами. Граф называется *связным* (*несвязным*), если каждые (не каждые) две его вершины связаны.

4°. Путь, содержащий все ребра данного графа, называется *эйлеровым путем* этого графа. Цикл, содержащий все ребра данного графа, называется *эйлеровым циклом* этого графа. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется *эйлеровым графом*.

Теорема 16.3.5. Любой граф является эйлеровым графом, тогда и только тогда, когда он есть связный граф и имеет только четные вершины.

Гамильтоновым путем (циклом) называется путь (цикл), который проходит через каждую вершину графа только по одному разу. Гамильтонов путь (цикл) всегда является простым. Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется *гамильтоновым графом*.

Критерий существования гамильтонова графа еще не найден. Известно лишь несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов, среди которых следует выделить два. Во-первых, всякий полный граф является гамильтоновым. Во-вторых, если граф, кроме простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.

Задачи для решения на практическом занятии

16.3.1. Найти количество ребер (m) и количество вершин (k), которые имеют графы, изображенные на рисунках 16.3.4–16.3.6:

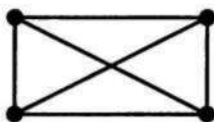


Рис. 16.3.4

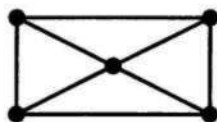


Рис. 16.3.5



Рис. 16.3.6

16.3.2. Вычислить число ребер в полных графах с n вершинами и нарисовать эти полные графы:

- 1) $n = 2$;
- 2) $n = 3$;
- 3) $n = 5$;
- 4) $n = 6$.

16.3.3. Граф G имеет пять вершин; B — одна из его вершин; $\bar{G}$ — дополнение графа G . Какова степень вершины B в графе G , если в графе G эта вершина:

- 1) принадлежит одному ребру;
- 2) принадлежит трем ребрам;
- 3) не принадлежит ни одному ребру?

16.3.4. Сколько ребер следует добавить к графам, которые изображены на рисунках 16.3.4–16.3.6, чтобы они стали полными? Нарисовать эти дополнения.

16.3.5. Существует ли граф с семью вершинами, сумма степеней которых равна

- 1) 1;
- 2) 2;
- 3) 3;
- 4) 30;
- 5) 42?

Нарисовать такой граф, если он существует.

16.3.6. Существует ли граф с восемью вершинами, у которого число нечетных вершин равно:

- 1) 0;
- 2) 1;
- 3) 2;
- 4) 8?

Нарисовать такой граф, если он существует.

16.3.7. Существует ли граф с шестью вершинами, степени которых все различны между собой, т. е. равны 0, 1, 2, 3, 4, 5?

16.3.8. Существует ли граф с пятью вершинами, степени которых равны:

- 1) 1, 2, 2, 2, 3;
- 2) 1, 2, 2, 3, 4;
- 3) 1, 2, 2, 3, 3?

Нарисовать такой граф, если он существует.

16.3.9. На рисунке 16.3.7 изображен граф G , причем от вершины B до вершины E можно добраться несколькими путями. Найти все пути, которые:

- 1) имеют длину два;

- 2) имеют длину три;
- 3) проходят через все вершины графа G .

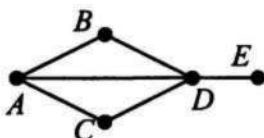


Рис. 16.3.7

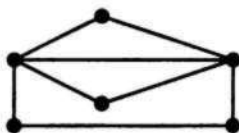


Рис. 16.3.8

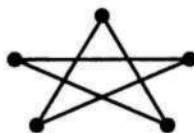


Рис. 16.3.9

16.3.10. Дан полный граф с пятью вершинами. Найти циклы, содержащие:

- 1) три ребра;
- 2) пять ребер;
- 3) десять ребер.

Какие из этих циклов простые?

16.3.11. Нарисовать несвязный граф, имеющий шесть вершин.

16.3.12. Можно ли назвать граф, изображенный на рисунке 16.3.8:

- 1) эйлеровым графом;
- 2) гамильтоновым графом?

Задачи для домашнего задания

16.3.13. Найти количество ребер (m) и количество вершин (k), которые имеет граф, изображенный на рисунке 16.3.8.

16.3.14. Вычислить число ребер в полных графах с n вершинами и нарисовать эти полные графы:

- 1) $n = 4$;
- 2) $n = 7$.

16.3.15. Граф G имеет шесть вершин; A — одна из его вершин; $\bar{G}$ — дополнение графа G . Чему равна степень вершины A в графе $\bar{G}$, если в графе G эта вершина:

- 1) принадлежит четырем ребрам;
- 2) принадлежит пяти ребрам;
- 3) изолированная?

16. Дискретная математика и элементы математической логики

16.3.16. Сколько ребер следует добавить к графу, который изображен на рис. 16.3.8, чтобы он стал полным, и нарисовать его дополнение?

16.3.17. В туристическом слете участвовало 10 человек. Некоторые участники слета, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Могло ли быть так, что число переданных конвертов составило:

- 1) два;
- 2) три;
- 3) двадцать;
- 4) сорок пять;
- 5) девяносто;
- 6) сто?

16.3.18. В туристическом слете участвовало 8 человек. Некоторые участники слета, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Могло ли быть так, что число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, равнялось:

- 1) двум;
- 2) трем;
- 3) восьми?

16.3.19. Существует ли граф с шестью вершинами, среди которых есть изолированная вершина и вершина степени пять?

16.3.20. Существует ли граф с шестью вершинами, степени которых равны:

- 1) 1, 2, 2, 2, 3, 5;
- 2) 0, 1, 2, 2, 3, 4;
- 3) 1, 1, 2, 2, 3, 3?

Нарисовать такой граф, если он существует.

16.3.21. На рис. 16.2.7 изображен граф G , причем от вершины A до вершины E можно добраться девятью путями. Найти все пути, которые:

- 1) имеют наименьшую длину;
- 2) содержат три ребра;
- 3) проходят через все вершины графа G .

16.3.22. Дан полный граф с пятью вершинами. Найти циклы, содержащие:

- 1) четыре ребра;
- 2) шесть ребер;

3) восемь ребер.

Какие из этих циклов простые?

16.3.23. Нарисовать несвязный граф, имеющий семь вершин.

16.3.24. Можно ли назвать граф, изображенный на рис. 16.3.9:

1) эйлеровым графом;

2) гамильтоновым графом?

Ответы

16.3.1. Рис. 16.3.4: $m = 6$, $k = 4$; рис. 16.3.5: $m = 8$, $k = 5$;

рис. 16.3.6: $m = 0$, $k = 3$.

16.3.2. 1) 1; 2) 3; 3) 10; 4) 15.

16.3.3. 1) 3; 2) 1; 3) 4.

16.3.4. Рис. 16.3.4: 0; рис. 16.3.5: 2; рис. 16.3.6: 3.

16.3.5. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да.

16.3.6. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да.

16.3.7. Нет.

16.3.8. 1) да; 2) да; 3) нет.

16.3.9. 1) (BD) , (DE) ; 2) (BA) , (AD) , (DE) ; 3) (BA) , (AC) , (CD) , (DE) ; (BD) , (DC) , (CA) , (AD) , (DE) ; (BD) , (DA) , (AC) , (CD) , (DE) .

16.3.12. 1) да; 2) нет.

16.3.13. $m = 8$, $k = 6$.

16.3.14. 1) 6; 2) 21.

16.3.15. 1) 1; 2) 0; 3) 5.

16.3.16. 7.

16.3.17. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет.

16.3.18. 1) да; 2) нет; 3) да.

16.3.19. Нет.

16.3.20. 1) нет; 2) да; 3) да.

16.3.21. а) (AD) , (DE) ; б) (AB) , (BD) , (DE) ; (AC) , (CD) , (DE) ;
в) (AC) , (CD) , (DB) , (BA) , (AD) , (DE) ; (AC) , (CD) , (DA) ,
 (AB) , (BD) , (DE) ; (AB) , (BD) , (DC) , (CA) , (AD) , (DE) ; (AB) ,
 (BD) , (DA) , (AC) , (CD) , (DE) ; (AD) , (DB) , (BA) , (AC) ,
 (CD) , (DE) ; (AD) , (DC) , (CA) , (AB) , (BD) , (DE) .

16.3.24. 1) да; 2) да.

16.4. Ориентированные графы

1°. *Ориентированным* называется ребро графа, когда оно соединяет две вершины, одна из которых считается *началом* ребра, а другая — *концом*. На рисунке ориентированное ребро обозначается стрелкой, а в тексте ориентированное ребро с началом в вершине A и с концом в вершине B обозначается $\langle AB \rangle$.

Ориентированным графом называется граф, который имеет только ориентированные ребра. Одна и та же вершина ориентированного графа может служить началом для одних ребер и концом для других. Число выходящих из вершины A ориентированного графа ребер называется *степенью выхода вершины A* (обозначается степ. вых. A). Число входящих в вершину A ориентированного графа ребер называется *степенью входа вершины A* (обозначается степ. вх. A).

Теорема 16.4.1. В ориентированном графе с n вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$ и p ребрами выполняются равенства:

- 1) степ. вх. $A_1 + \text{степ. вх. } A_2 + \dots + \text{степ. вх. } A_n = p$;
- 2) степ. вых. $A_1 + \text{степ. вых. } A_2 + \dots + \text{степ. вых. } A_n = p$.

Вершина ориентированного графа, у которой степень входа и степень выхода равны нулю, называется *изолированной*. Вершина ориентированного графа, у которой степень входа равна нулю, а степень выхода положительна, называется *источником*. Вершина ориентированного графа, у которой степень входа положительна, а степень выхода равна нулю, называется *стоком*.

2°. *Путем в ориентированном графе* называется последовательность ориентированных ребер, такая, что конец любого предыдущего ребра совпадает с началом следующего и ни одно ребро не встречается более одного раза. Путь в ориентированном графе называется *простым*, если он не проходит ни через одну вершину более одного раза. *Ориентированным циклом* называется замкнутый путь. Число ребер в пути (цикле) называется *длиной пути (цикла)*, а длина наикратчайшего пути от вершины A до вершины B называется *расстоянием* от вершины A до вершины B . Расстояние от вершины A до вершины B обозначается $S(AB)$.

3°. Ориентированный граф, у которого любые две различные вершины соединены одним и только одним ребром, называется *полным ориентированным графом*.

Теорема 16.4.2. Если в полном ориентированном графе с n ($n > 2$) вершинами хотя бы две вершины имеют одинаковые степени выхода, то в этом графе найдутся три вершины, у которых ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл.

Теорема 16.4.3. Каждый полный ориентированный граф имеет простой ориентированный путь, который проходит через все вершины этого графа.

Задачи для решения на практическом занятии

16.4.1. Для ориентированного графа, изображенного на рис. 16.4.1:

- 1) определить степень входа и степень выхода каждой вершины;
- 2) найти источник и сток;
- 3) найти все пути из вершины C в вершину D ;
- 4) определить расстояние от вершины C до вершины D ;
- 5) указать вершину, которая не достижима ни из одной вершины графа.

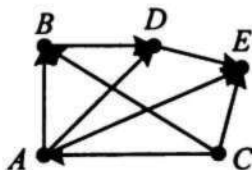


Рис. 16.4.1

16.4.2. Нарисовать ориентированный граф с пятью вершинами, который имеет ровно два стока и один источник. Какое наименьшее число ребер имеет такой граф?

16.4.3. Дан полный ориентированный граф с пятью вершинами. Сумма степеней входа первых четырех вершин равна 9, а их сумма степеней выхода равна 7. Найти степень входа и степень выхода пятой вершины этого графа. Нарисовать граф, удовлетворяющий условиям задачи.

16.4.4. Для полного ориентированного графа, который изображен на рис. 16.4.2:

- 1) проверить условия теоремы 16.4.2;
- 2) найти такие три вершины графа, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл;
- 3) найти простой ориентированный путь, который проходит через все вершины графа.

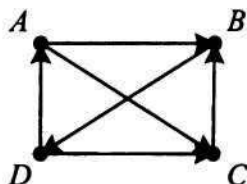


Рис. 16.4.2

16.4.5. Нарисовать полный ориентированный граф с пятью вершинами, который удовлетворяет условиям теоремы 16.4.2. Найти:

- 1) такие три вершины этого графа, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл;
- 2) простой ориентированный путь, который проходит через все вершины этого графа.

Задачи для домашнего задания

16.4.6. Для ориентированного графа, изображенного на рис. 16.4.3:

- 1) определить степень входа и степень выхода каждой вершины;
- 2) найти источник и сток;
- 3) найти все пути из вершины A в вершину E ;

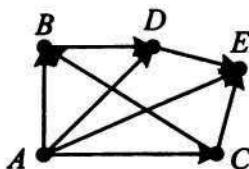


Рис. 16.4.3

- 4) определить расстояние от вершины A до вершины E ;
- 5) указать вершину, которая не достижима ни из одной вершины графа.

16.4.7. Нарисовать ориентированный граф с шестью вершинами, который имеет:

- 1) ровно два стока и четыре источника;
- 2) ровно два источника и четыре стока.

Какое наименьшее число ребер имеет такой граф?

16.4.8. Дан полный ориентированный граф с шестью вершинами. Сумма степеней входа последних пяти вершин равна 11, а их сумма степеней выхода равна 14. Найти степень входа и степень выхода первой вершины этого графа. Нарисовать граф, удовлетворяющий условиям задачи.

16.4.9. Дополнить граф, который изображен на рис. 16.4.3, ориентированными ребрами так, чтобы в получившемся полном ориентированном графе нашлись такие три вершины графа, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл.

16.4.10. Нарисовать полный ориентированный граф с шестью вершинами, который удовлетворяет условиям теоремы 16.4.2. Найти:

- 1) такие три вершины этого графа, что ребра, соединяющие их, образуют ориентированный цикл;
- 2) простой ориентированный путь, который проходит через все вершины этого графа.

Ответы

16.4.1. 1) степ. вх. $A = 1$, степ. вых. $A = 3$; степ. вх. $B = 2$, степ. вых. $B = 1$; степ. вх. $C = 0$, степ. вых. $C = 3$; степ. вх. $D = 2$, степ. вых. $D = 1$; степ. вх. $E = 0$, степ. вых. $E = 3$; 2) вершина C — источник, вершина E — сток; 3) $\langle CB \rangle$, $\langle BD \rangle$; $\langle CA \rangle$, $\langle AD \rangle$; $\langle CA \rangle$, $\langle AB \rangle$, $\langle BD \rangle$; 4) $S(CD) = 2$; 5) вершина C .

16.4.2. 2 ребра.

16.4.3. Степ. вх. $A_5 = 1$, степ. вых. $A_5 = 3$.

16. Дискретная математика и элементы математической логики

16.4.6. 1) степ. вх. $A = 0$, степ. вых. $A = 4$; степ. вх. $B = 2$, степ. вых. $B = 1$; степ. вх. $C = 1$, степ. вых. $C = 2$; степ. вх. $D = 2$, степ. вых. $D = 1$; степ. вх. $E = 3$, степ. вых. $E = 0$; 2) вершина A — источник, вершина E — сток; 3) $\langle AE \rangle$, $\langle AC \rangle$, $\langle CE \rangle$, $\langle AD \rangle$, $\langle DE \rangle$, $\langle AB \rangle$, $\langle BD \rangle$, $\langle DE \rangle$; $\langle AC \rangle$, $\langle CB \rangle$, $\langle BD \rangle$, $\langle DE \rangle$; 4) $S(CD) = 1$; 5) вершина A .

16.4.7. 4 ребра.

16.4.8. Степ. вх. $A_1 = 4$, степ. вых. $A_1 = 1$.

17. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

17.1. Случайные события.

Классическое определение вероятностей

1°. Под *событием* в теории вероятностей понимается результат испытания (наблюдения, опыта). События обозначаются заглавными буквами $A, B, C, \dots$. Если событие обязательно произойдет в данном испытании, то оно называется *достоверным*; если событие обязательно не произойдет в данном испытании, то оно называется *невозможным*; если событие может произойти, а может не произойти в данном испытании, то оно называется *случайным*.

2°. Каждый из равновозможных исходов испытания называется *элементарным исходом*, а исход, который приводит к наступлению случайного события, называется *исходом, благоприятствующим* этому событию. Количественной мерой возможности наступления случайного события в данном испытании является *вероятность* события.

3°. *Классическое определение вероятности*: вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A , к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов данного испытания, образующих полную группу: $P(A) = \frac{m}{n}$. Вероятность достоверного события равна 1; вероятность невозможного события равна 0; вероятность случайного события есть число из интервала $(0;1)$.

4°. Для вычисления числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, или числа всех элементарных исходов данного испытания могут использоваться формулы комбинаторики.

Число сочетаний из k элементов по l в каждом вычисляется по формуле: $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$ (сочетаниями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит ровно l элементов из числа данных k элементов, и отличаются друг от друга только составом элементов).

Число размещений из k элементов по l в каждом вычисляется по формуле: $A_k^l = \frac{k!}{(k-l)!}$ (размещениями из k элементов по l в каждом называются такие соединения, каждое из которых содержит ровно l элементов из числа данных k элементов, и отличаются друг от друга не только составом элементов, но и порядком их расположения).

Число перестановок из k элементов вычисляется по формуле: $P_k = k!$ (перестановками из k элементов называются такие соединения, каждое из которых содержит все k данных элементов, и отличаются друг от друга только порядком их расположения).

Задачи для решения на практическом занятии

17.1.1. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет:

- 1) три очка;
- 2) семь очков;
- 3) менее семи очков.

17.1.2. На каждой карточке написана одна из букв: Б, Д, О, Р. Карточки тщательно перемешаны и выложены в одну линию. Найти вероятность того, что карточки образуют слово «БРОД».

17.1.3. Студент забыл две последние цифры телефонного номера. Помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что номер набран верно.

17.1.4. В ящике 15 деталей, среди которых — 3 бракованных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей:

- 1) нет бракованных;
- 2) одна бракованная;

3) две бракованные;

4) все бракованные.

17.1.5. В «секретном» замке на общей оси три диска, каждый из которых разделен на десять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное трехзначное число. Найти вероятность того, что замок будет открыт при произвольной установке дисков.

Задачи для домашнего задания

17.1.6. Кубик, все грани которого окрашены, распилен на 125 равных частей. Полученные части тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная часть имеет определенное число окрашенных граней:

1) четыре;

2) три;

3) две;

4) одну;

5) ни одной.

17.1.7. В коробке находятся пять шаров одинакового размера, на каждом из которых указан номер: 1, 2, 3, 4, 5. Шары тщательно перемешаны и по одному извлечены из коробки. Найти вероятность того, что шары будут извлечены:

1) в порядке возрастания номеров;

2) в порядке убывания номеров.

17.1.8. Студент забыл три последние цифры телефонного номера. Помня, что эти цифры различны и не являются цифрами 2, 4, 8, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что номер набран верно.

17.1.9. В ящике 12 деталей, среди которых 4 неокрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окрашенных будет:

1) две;

2) одна;

3) ни одной.

17.1.10. На полке расставлены наудачу десять компакт-дисков. Найти вероятность того, что три определенных компакт-диска окажутся рядом:

- 1) в заданном порядке;
- 2) в произвольном порядке.

Ответы

17.1.1. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) 1.

17.1.2. $\frac{1}{24}$.

17.1.3. $\frac{1}{90}$.

17.1.4. 1) $\frac{44}{91}$; 2) $\frac{198}{455}$; 3) $\frac{36}{455}$; 4) $\frac{1}{455}$.

17.1.5. $\frac{1}{1000}$.

17.1.6. 1) 0; 2) $\frac{8}{125}$; 3) $\frac{36}{125}$; 4) $\frac{54}{125}$; 5) $\frac{27}{125}$.

17.1.7. 1) $\frac{1}{120}$; 2) $\frac{1}{120}$.

17.1.8. $\frac{1}{210}$.

17.1.9. 1) $\frac{56}{165}$; 2) $\frac{32}{495}$; 3) $\frac{1}{495}$.

17.1.10. 1) $\frac{1}{90}$; 2) $\frac{1}{15}$.

17.2. Сумма и произведение событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Формула полной вероятности. Формула Байеса

1°. Суммой событий A и B называется событие C , состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий в данном испытании. События A и B называются *несовместными (совместными)*, если они не могут (могут) произойти вместе в одном испытании.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

2°. Произведением событий A и B называется событие C , состоящее в появлении двух этих событий в данном испытании. События A и B называются *независимыми (зависимыми)*, если появление одного из них не влияет (влияет) на вероятность появления другого. Вероятность события B , вычисленная при условии, что событие A произошло, называется условной вероятностью события B относительно события A и обозначается $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ независимы в совокупности, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого события, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ зависимы в совокупности, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{k-1}}(A_k).$$

3°. Несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_k$ образуют *полную группу* событий, если в данном испытании обязательно произойдет одно из этих событий. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ образуют полную группу, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1.$$

Два события, которые образуют полную группу, называются *противоположными*. Противоположные события обозначаются A и $\bar{A}$, а их вероятности $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$ удовлетворяют равенству: $q = 1 - p$. Если события $A_1, A_2, \dots, A_k$ независимы в совокупности, то вероятность события A , состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ в данном испытании, вычисляется по формуле:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k,$$

где $q_1 = P(\bar{A}_1)$, $q_2 = P(\bar{A}_2)$, ..., $q_k = P(\bar{A}_k)$.

4°. Если событие A может произойти в данном испытании лишь при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_k$, которые образуют полную группу, то вероятность события A вычисляется по формуле *полной вероятности*:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_k) \cdot P_{B_k}(A),$$

где $P(B_1), \dots, P(B_k)$ — вероятности событий $B_1, B_2, \dots, B_k$, причем $P(B_1) + \dots + P(B_k) = 1$; $P_{B_1}(A), \dots, P_{B_k}(A)$ — условные вероятности события A .

Для определения вероятности события B_i , $i = 1, \dots, k$, при условии, что событие A произошло, используется формула Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Задачи для решения на практическом занятии

17.2.1. В урне 5 красных, 3 синих и 2 белых шара одного размера. Наудачу из урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что этот шар цветной.

17.2.2. В первом ящике находятся 10 деталей, из которых семь стандартных; во втором ящике находятся 11 деталей, из которых девять стандартных. Из каждого ящика наудачу извлекают по две детали. Найти вероятность того, что:

- 1) все извлеченные детали стандартны;
- 2) среди извлеченных деталей есть нестандартные.

17.2.3. Контролер проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что проверенное изделие стандартно, составляет 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий:

- 1) оба стандартны;
- 2) только одно стандартно;
- 3) хотя бы одно стандартно.

17.2.4. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,9, а для второго и третьего — соответственно 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что при одном залпе в цель попадут:

- 1) все стрелки;
- 2) только два стрелка;
- 3) не менее двух стрелков;
- 4) только один стрелок;
- 5) хотя бы один стрелок.

17.2.5. В первой урне 4 черных и 6 белых шаров, а во второй урне 2 черных и 8 белых шаров. Из наудачу выбранной урны вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

17.2.6. На предприятии, изготавливающем моторы, первый цех производит 40%, второй — 35%, а третий — 25% всех моторов. Процент брака для каждого из цехов составляет соответственно 5%, 4%, 2% от изготовленных моторов. Наудачу выбранный мотор оказался небракованным. Найти вероятность, что он изготовлен в третьем цехе.

17.2.7. В первой коробке находится 15 ламп, среди которых 5 мощностью в 60W, а во второй коробке находится 12 ламп, среди которых 4 мощностью в 60W. Из каждой коробки извлекли по одной лампе, а затем из извлеченных ламп выбрали одну. Найти вероятность того, что эта лампа имеет мощность 60W.

17.2.8. В университет на факультеты M и N поступило равное число студентов, а на факультет K студентов поступило в два раза меньше, чем на факультет M . Вероятность того, что студент, поступивший на факультет M , сдаст первую сессию, равна 0,9. Для студентов, поступивших на факультеты N и K , вероятность сдачи первой сессии соответственно равна 0,6 и 0,8. Студент сдал первую сессию. Найти вероятность того, что он учится на факультете M .

Задачи для домашнего задания

17.2.9. В урне 5 красных, 3 синих и 2 белых шара одного размера. Из урны по одному без возвращения извлекают три шара. Найти вероятность того, что первым будет извлечен красный шар, вторым — синий, третьим — белый.

17.2.10. От конечной остановки в аэропорт отправились два автобуса. Вероятность прибытия автобуса в аэропорт вовремя равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух автобусов в аэропорт вовремя придут:

- 1) оба;
- 2) только один;
- 3) хотя бы один.

17.2.11. Устройство состоит из трех элементов. Вероятности выхода из строя за определенное время первого, второго и третьего элементов соответственно составляют 0,2, 0,1 и 0,3. Найти вероятность того, что в течение определенного времени безотказно будут работать:

- 1) все элементы;
- 2) только два элемента;
- 3) не менее одного и не более двух элементов;
- 4) хотя бы один элемент.

17.2.12. При подготовке к экзамену студент из 20 вопросов выучил 15. Найти вероятность того, что из трех предложенных на экзамене вопросов студент знает:

- 1) не менее двух;
- 2) менее двух;
- 3) не менее одного и не более двух;
- 4) хотя бы один.

17.2.13. В первой урне 10 синих и 5 белых шаров, а во второй урне 8 синих и 7 белых шаров. Из наудачу выбранной урны вынули один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар из второй урны.

17.2.14. В студенческой группе 10% отличников, 20% студентов-хорошистов, а остальные студенты имеют тройки. Вероятность сдачи зачета для отличника составляет 0,9, для студента-хорошиста 0,8, а для студента, имеющего тройки, — 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент группы, сдаст зачет.

17.2.15. Детали, поступающие на сборку, изготавливаются тремя станками-автоматами. Производительности станков-автоматов относятся как 5 : 3 : 2. Процент брака для первого, второго и третьего автоматов соответственно составляет 8%, 5% и 2%. Деталь, поступившая на сборку, оказалась качественной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим станком-автоматом.

17.2.16. В каждой из трех коробок содержится 6 ламп мощностью в 60W и 4 лампы мощностью в 100W. Из первой коробки взяли одну лампу и переложили во вторую коробку, затем из второй коробки взяли также одну лампу и переложили в третью. Найти вероятность того, что лампа, извлеченная из третьей коробки, имеет мощность 100W.

Ответы

17.2.1. 4/5.

17.2.2. 1) 84/275; 2) 191/275.

17.2.3. 1) 0,81; 2) 0,18; 3) 0,99.

17.2.4. 1) 0,432; 2) 0,444; 3) 0,876; 4) 0,116; 5) 0,992.

17.2.5. 0,3.

17.2.6. 0,255.

17.2.7. 1/3.

17.2.8. 9/19.

17.2.9. 1/24.

- 17.2.10. 1) 0,64; 2) 0,32; 3) 0,96.
 17.2.11. 1) 0,504; 2) 0,398; 3) 0,49; 4) 0,994.
 17.2.12. 1) 49/57; 2) 8/57; 3) 45/76; 4) 113/114.
 17.2.13. 7/12.
 17.2.14. 0,67.
 17.2.15. 0,2083.
 17.2.16. 0,4.

17.3. Независимые испытания.

Формулы Бернулли и Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

1°. Испытания, при проведении которых вероятность появления события A в одном испытании не зависит от исходов других испытаний, называются *независимыми*. Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз, обозначается $P_n(k)$; вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, обозначается $P_n(k_1; k_2)$.

2°. *Формула Бернулли*. Пусть производится n независимых испытаний и вероятность наступления события A в каждом из этих испытаний равна p ($0 < p < 1$), то $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

$q = 1 - p$. Используя формулу Бернулли, можно найти вероятности:

$$P_n(0; k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1) + P_n(k)$$

$$P_n(k_1; k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2 - 1) + P_n(k_2)$$

$$P_n(k; n) = P_n(k) + P_n(k + 1) + \dots + P_n(n-1) + P_n(n).$$

Применение формулы Бернулли затруднено при больших значениях n и при значениях p , близких к 0. При больших значениях n применяются локальная и интегральная теоремы Лапласа, которые являются приближенными, а при больших значениях n и при значениях p , близких к 0, применяется формула Пуассона.

3°. *Локальная теорема Лапласа*. Пусть производится n независимых испытаний, причем n велико, и вероятность наступления события A в каждом из этих испытаний равна p ($0 < p < 1$), то

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в *приложении 1*; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, учитывая четность функции $\varphi(x)$ ($\varphi(-x) = \varphi(x)$).

4°. **Интегральная теорема Лапласа.** Пусть производится n независимых испытаний, причем n велико, и вероятность наступления события A в каждом из этих испытаний равна p ($0 < p < 1$),

то $P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ — функция

Лапласа $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Таблица значений функции

$\Phi(x)$ для положительных значений x приведена в *приложении 2*; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, учитывая нечетность функции $\Phi(x)$ ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$). Для значений $x > 5$ считают, что $\Phi(x) = 0,5$.

5°. **Формула Пуассона.** Пусть производится n независимых испытаний, причем n велико, и вероятность наступления события A в каждом из этих испытаний равна p , причем значение p близко к 0,

то $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

6°. Если производится n независимых испытаний и вероятность наступления события A в каждом из этих испытаний равна p ($0 < p < 1$), то число k_0 называется *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие A наступит в этих испытаниях k_0 раз, не меньше вероятности остальных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяется двойным неравенством: $np - q \leq k_0 < np + p$. Если $np - q$ целое, то существует два наивероятнейших числа: k_0 и $k_0 + 1$.

Задачи для решения на практическом занятии

17.3.1. Наудачу выбрана семья, имеющая пять детей. Вероятность рождения одного мальчика равна 0,5. Найти вероятность того, что в этой семье число мальчиков:

1) равно четырем;

- 2) не менее четырех;
- 3) не менее трех и не более четырех;
- 4) менее трех;
- 5) хотя бы один.

17.3.2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Произведено 100 выстрелов. Найти вероятность того, что мишень будет поражена:

- 1) ровно 85 раз;
- 2) не менее 70 и не более 85 раз;
- 3) не менее 85 раз;
- 4) менее 85 раз.

17.3.3. Вероятность того, что одно изделие при транспортировке будет повреждено, равна 0,0004. В торговую сеть отправлено 5000 изделий. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено:

- 1) ни одного изделия;
- 2) ровно два изделия;
- 3) менее двух изделий;
- 4) хотя бы одно изделие.

Принять $e^{-2} = 0,1353$.

17.3.4. Вероятность того, что элемент некоторого устройства выдержит испытание, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание, если число испытаний равно:

- 1) 8;
- 2) 89.

Задачи для домашнего задания

17.3.5. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что станок потребует внимание рабочего в течение часа, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение часа внимание рабочего потребует следующее количество станков:

- 1) один;
- 2) менее двух;
- 3) не менее одного и не более двух;
- 4) менее трех;

Практические занятия по математике: теория, задания, ответы

5) не менее трех;

6) хотя бы один.

17.3.6. Монету подбрасывают 144 раза. Найти вероятность того, что «герб» выпадет:

1) ровно 70 раз;

2) не менее 70 и не более 80 раз;

3) не более 70 раз;

4) более 70 раз.

17.3.7. Станок-автомат производит детали. Вероятность того, что одна деталь окажется бракованной, равна 0,003. Найти вероятность того, что среди 1000 изготовленных деталей бракованных будет:

1) ровно одна;

2) ровно две;

3) не менее трех;

4) хотя бы одна.

Принять $e^3 = 0,0498$.

17.3.8. Всхожесть семян равна 0,8. Посажено 625 семян. Найти:

1) наимвероятнейшее число взошедших семян;

2) вероятность наивероятнейшего числа взошедших семян.

Ответы

17.3.1. 1) 5/32; 2) 6/32; 3) 15/32; 4) 16/32; 5) 31/32.

17.3.2. 1) 0,0456; 2) 0,8882; 3) 0,1056; 4) 0,8944.

17.3.3. 1) 0,1353; 2) 0,2706; 3) 0,4059; 4) 0,8647.

17.3.4. 1) 6; 2) 62, 63.

17.3.5. 1) 0,4096; 2) 0,8192; 3) 0,5632; 4) 0,9728; 5) 0,0272;
6) 0,5904.

17.3.6. 1) 0,063; 2) 0,5375; 3) 0,3707; 4) 0,6293.

17.3.7. 1) 0,1494; 2) 0,2241; 3) 0,5767; 4) 0,9502.

17.3.8. 1) 500; 2) 0,0399.

18. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

18.1. Дискретные случайные величины.

Закон распределения вероятностей.

Числовые характеристики.

Биноминальный закон распределения

1°. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате испытания принимает только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от многих случайных причин. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной называется такая случайная величина, возможными значениями которой являются отдельные изолированные числа.

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется соответствие между ее возможными значениями $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующими им вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, которое обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Закон распределения можно также задать аналитически (в виде формулы) или графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения случайной величины X , а на оси ординат — соответствующие им значения вероятностей. Фигура, полученная после соединения построенных точек отрезками прямых, называется *многоугольником распределения*.

2°. Числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений ее возможных значений на их соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — возможные значения дискретной случайной величины; $p_1, p_2, \dots, p_n$ — соответствующие им значения вероятностей.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания:

- 1) $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
- 2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$, где $C = \text{const}$;
- 3) $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины;
- 4) $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии:

- 1) $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;
- 2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$, где $C = \text{const}$;
- 3) $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеивание возможных значений случайной величины около ее математического ожидания.

3°. *Биноминальным законом распределения* дискретной случайной величины X называется закон, в котором возможными значениями случайной величины являются целые числа $X = k$ ($0 \leq k \leq n$) появления некоторого события A в n независимых испытаниях, а вероятности этих возможных значений определяются по формуле Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — постоянная вероятность наступления события A в каждом из n независимом испытании, а $q = 1 - p$.

Математическое ожидание и дисперсия распределенной по биномиальному закону дискретной случайной величины вычисляются по формулам:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Задачи для решения на практическом занятии

18.1.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	4	7
P	p_1	0,2	0,5

Найти:

- 1) p_1 ;
- 2) $M(X)$;
- 3) $D(X)$;
- 4) $\sigma(X)$;
- 5) $M(2X + 3)$;
- 6) $D(-2X)$.

18.1.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	4	x_3
P	p_1	0,2	0,7

Найти $D(X)$, если $M(X) = 8$.

18.1.3. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Найти вероятности p_1 , p_2 , p_3 , соответствующие ее значениям x_1 , x_2 , x_3 , если $M(X) = 3$, а $D(X) = 7,2$.

18.1.4. Дискретная случайная величина X , принимающая четыре возможных значения, распределена по биномиальному закону. Найти дисперсию этой случайной величины, если $M(X) = 1,8$.

18.1.5. В цех поступили детали, среди которых 10% бракованных. Сборщик получил четыре детали. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа бракованных деталей среди деталей, полученных сборщиком.

18.1.6. Среди 12 телевизоров, поступивших в магазин, три имеют скрытый дефект. Покупатель купил два телевизора. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа телевизоров без скрытых дефектов среди двух купленных.

18.1.7. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,9, а для второго и третьего — соответственно 0,7 и 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа попаданий в мишень этими стрелками при одном залпе.

Задачи для домашнего задания

18.1.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-4	2	8
P	0,1	p_2	0,6

Найти:

- 1) p_2 ;
- 2) $M(X)$;
- 3) $D(X)$;
- 4) $\sigma(X)$;
- 5) $M(-2X + 4)$;
- 6) $D(2X)$.

18.1.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	x_1	1	4
P	p_1	0,4	0,5

Найти $D(X)$, если $M(X) = 2$.

18.1.10. Дискретная случайная величина X принимает два возможных значения: x_1 и x_2 , причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1 , равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины, если $M(X) = 2$, а $D(X) = 4$. В ответе указать $x_1^2 + x_2^2$.

18.1.11. Вероятность наступления события A в каждом из пяти независимых испытаний равна 0,8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа наступлений события A в этих пяти испытаниях.

18.1.12. Баскетболист производит три штрафных броска. Вероятность промаха при каждом броске равна 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа попаданий мяча в корзину.

18.1.13. Два покупателя независимо друг от друга могут совершить по одной покупке. Вероятности одной покупки для этих покупателей соответственно равны 0,7 и 0,6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа покупок, совершенных этими покупателями.

18.1.14. При подготовке к экзамену студент из 20 вопросов выучил 12. Билет содержит три вопроса. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа вопросов в билете, выученных студентом.

Ответы

18.1.1. 1) 0,3; 2) 4; 3) 12; 4) $2\sqrt{3}$; 5) 11; 6) 48.

18.1.2. 9,6.

18.1.3. 0,3; 0,1; 0,6.

18.1.4. 0,72.

18.1.5. 0,4; 0,36.

18.1.6. $3/2$; $15/44$.

18.1.7. 2,4; 0,46.

18.1.8. 1) 0,3; 2) 5; 3) 16,2; 4) $\sqrt{16,2}$; 5) -6; 6) 64,8.

18.1.9. 6.

18.1.10. 37.

18.1.11. 4; 0,8.

18.1.12. 2,4; 0,48.

18.1.13. 1,3; 0,45.

18.1.14. 1,8; 306/475.

18.2. Непрерывные случайные величины.

Функция распределения и плотность распределения вероятностей.

Равномерное и нормальное распределения.

Числовые характеристики

1°. *Непрерывной* называется такая случайная величина, которая может принимать все возможные значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Функцией распределения вероятностей (интегральной функцией) называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения аргумента x вероятность того, что возможные значения случайной величины X меньше x , т. е. функция распределения задается равенством

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения вероятностей:

1. Все значения функции $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$, т. е. $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Функция $F(x)$ есть функция неубывающая, т. е. для всех $x_2 > x_1$ справедливо неравенство $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$; $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией) называется функция $f(x)$, равная производной $F(x)$, т. е. $f(x) = F'(x)$.

18. Теория вероятностей. Случайные величины

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. Функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т. е.
 $f(x) \geq 0$.

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Если известна плотность распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

2°. Математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X вычисляются по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X), \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то ее числовые характеристики вычисляются по формулам:

$$M(X) = \int_a^b xf(x) dx, D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(X), \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из интервала $(a; b)$, вычисляется по формулам:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

3°. *Равномерным* называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b; \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ равномерно распределенной непрерывной случайной величины X можно вычислить по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X , распределенная нормально, примет значение из интервала $(a; b)$, вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа.

Задачи для решения на практическом занятии

18.2.1. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$\text{распределения вероятностей: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{16}, & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Вычислить:

- 1) $M(X)$;
- 2) $D(X)$;
- 3) $\sigma(X)$;
- 4) $P(2 < X < 6)$;
- 5) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

18. Теория вероятностей. Случайные величины

18.2.2. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$\text{распределения вероятностей: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1; \\ \frac{x^2 - x}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Вычислить:

- 1) $M(X)$;
- 2) $D(X)$;
- 3) $\sigma(X)$;
- 4) $P(-1 < X < 3)$;
- 5) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

18.2.3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью

$$\text{распределения вероятностей: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{2x}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$.

18.2.4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью

$$\text{распределения вероятностей: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2; \\ 2x - 4, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$.

18.2.5. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно и задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2; \\ c, & \text{при } 2 < x \leq 6; \\ 0, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Найти:

- 1) c ;
- 2) $M(X)$;
- 3) $D(X)$;
- 4) $\sigma(X)$;

5) $P(3 < X < 5)$;

6) построить график функции $f(x)$.

18.2.6. Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}$.

Найти:

1) $M(X)$;

2) $D(X)$;

3) $\sigma(X)$;

4) $P(12 < X < 14)$;

5) построить график функции $f(x)$.

Задачи для домашнего задания

18.2.7. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$\text{распределения вероятностей: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{25}, & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Вычислить:

1) $M(X)$;

2) $D(X)$;

3) $\sigma(X)$;

4) $P(-1 < X < 2)$;

5) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

18.2.8. Непрерывная случайная величина X задана функцией

$$\text{распределения вероятностей: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2; \\ \frac{x^2 - 2x}{3}, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Вычислить:

1) $M(X)$;

2) $D(X)$;

3) $\sigma(X)$;

4) $P(2,4 < X < 4)$;

5) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

18.2.9. Непрерывная случайная величина X задана плотностью

$$\text{распределения вероятностей: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{18}, & \text{при } 0 < x \leq 6; \\ 0, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$.

18.2.10. Непрерывная случайная величина X задана плотностью

$$\text{распределения вероятностей: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{2(x+2)}{9}, & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$.

18.2.11. Непрерывная случайная величина X распределена равно-

$$\text{мерно и задана плотностью распределения: } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -1; \\ c, & \text{при } -1 < x \leq 4; \\ 0, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти:

1) c ;

2) $M(X)$;

3) $D(X)$;

4) $\sigma(X)$;

5) $P(1 < X < 3)$;

6) построить график функции $f(x)$.

18.2.12. Непрерывная случайная величина X распределена нор-

$$\text{мально и задана плотностью распределения } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}.$$

Найти:

1) $M(X)$;

2) $D(X)$;

- 3) $\sigma(X)$;
4) $P(-4 < X < 22)$;
5) построить график функции $f(x)$.

Ответы

18.2.1. 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{8}{9}$; 3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$.

18.2.2. 1) $\frac{19}{12}$; 2) $\frac{11}{144}$; 3) $\frac{\sqrt{11}}{12}$; 4) 1.

$$18.2.3. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$18.2.4. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2; \\ (x-2)^2, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

18.2.5. 1) 0,25; 2) 4; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 5) 0,5.

18.2.6. 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 0,1359.

18.2.7. 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{25}{18}$; 3) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{4}{25}$.

18.2.8. 1) $\frac{23}{9}$; 2) $\frac{13}{162}$; 3) $\frac{\sqrt{26}}{18}$; 4) 0,68.

$$18.2.9. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{36}, & \text{при } 0 < x \leq 6; \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

19. Элементы математической статистики

$$18.2.10. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{(x+2)^2}{9}, & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$18.2.11. \quad 1) 0,2; 2) 1,5; 3) \frac{25}{12}; 4) \frac{5\sqrt{3}}{6}; 5) 0,4.$$

$$18.2.12. \quad 1) -2; 2) 16; 3) 4; 4) 0,6915.$$

19. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

19.1. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

1°. *Статистической совокупностью* называется множество однородных объектов, которые изучаются относительно некоторого количественного или качественного признака. Для изучения статистической совокупности обычно применяется *выборочный метод*, состоящий в отборе случайным образом части объектов статистической совокупности для проведения их обследования. Статистическая совокупность, из которой случайным образом отбирается часть ее объектов, называется *генеральной совокупностью*, а множество объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Количество N объектов генеральной совокупности и количество n объектов выборки называется *объемом* генеральной совокупности и *объемом* выборки.

2°. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n , причем x_1 значение некоторого признака наблюдалось n_1 раз, значение x_2 наблюдалось n_2 раз, значение x_k — n_k раз и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются *вариантами*, а числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ — их *частотами*. Последовательность вариантов, записанная в порядке возрастания их значений, называется *вариационным рядом*. *Модой* вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариантов вариационного ряда и соответствующих им частот. Если число значений наблюдаемого признака велико или этих значений бесконечно много, то статистическое распределение выборки задается в виде последовательности конечного числа интервалов и соответствующих им частот. Такое статистическое распределение называется *интервальным*, а в качестве частоты, соответствующей некоторому интервалу, принимают сумму частот всех вариантов, принадлежащих этому интервалу.

3°. *Полигоном частот* называется ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, где $x_1, x_2, \dots, x_k$ — варианты, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ — соответствующие им частоты.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h , а высоты равны отношению n_i/h , причем для нахождения h длину интервала, в котором находятся все наблюдаемые значения признака, делят на некоторое целое число — количество частичных интервалов, а в качестве n_i для i -того частичного интервала берется сумма частот вариантов, попавших в этот интервал.

Если выборка состоит из повторяющихся значений признака, то для графического изображения статистического распределения используется полигон. Для графического изображения интервального статистического распределения применяется гистограмма.

4°. *Статистическими оценками* параметров генеральной совокупности называются оценки, полученные на основании выборки. Статистическая оценка, определяющаяся одним числом, называется *точечной*. Точечными оценками *генеральной средней* и *генеральной дисперсии* являются *выборочная средняя* и *выборочная дисперсия*. Статистическая оценка является случайной величиной и меняется в зависимости от сделанной выборки. Если математическое ожидание статистической оценки равно оцениваемому параметру генеральной совокупности, то такая оценка называется *несмещенной*, а если не равно — то *смещенной*.

Несмещенной оценкой генеральной средней служит выборочная средняя, которая вычисляется по формуле:

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n},$$

где x_i — вариант выборки; n_i — частота варианта x_i ; $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия, которая вычисляется по формуле:

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n}.$$

Иногда применяется формула:

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - (\bar{x}_s)^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия, которая вычисляется по формуле:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_s.$$

5°. Статистическая оценка, определяющаяся двумя числами — концами интервала, который покрывает оцениваемый параметр генеральной совокупности, называется *интервальной*. Интервал, в который попадает оцениваемый параметр генеральной совокупности с заданной *надежностью* (вероятностью), называется *доверительным*.

Интервальной оценкой с надежностью γ генеральной средней a в случае нормального распределения генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал, определяемый двойным неравенством:

$$\bar{x}_s - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}_s$ — выборочная средняя; t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (прил. 2), при котором $\Phi(t) = \gamma/2$; n — объем выборки.

Интервальной оценкой с надежностью γ генеральной средней a в случае нормального распределения генеральной совокупности при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал, определяемый двойным неравенством:

$$\bar{x}_* - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_* + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}_*$ — выборочная средняя; t_γ — параметр, который находится по таблице приложения 3 по известным значениям объема выборки n и надежности оценки γ ; $s = \sqrt{s^2}$ — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Интервальной оценкой с надежностью γ генерального среднего квадратического отклонения σ в случае нормального распределения генеральной совокупности служит доверительный интервал, определяемый двойным неравенством:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q),$$

где q — параметр, который находится по таблице приложения 4 по известным значениям объема выборки n и надежности оценки γ ; $s = \sqrt{s^2}$ — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Задачи для решения на практическом занятии

19.1.1. В организации работает 16 сотрудников. Ниже приведены данные опроса этих сотрудников о размере денежных премий (тыс. руб.), полученных ими в течение года: 2, 2, 1, 0, 5, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 1. Составить статистическое распределение выборки, найти моду вариационного ряда и построить полигон частот статистического распределения.

19.1.2. Получена выборка измерения массы тела 25 студентов-юношей: 52,3; 56,4; 51,8; 58,7; 55,4; 59,3; 44,1; 61,2; 62,3; 64,1; 65,7; 69,2; 63,8; 67,2; 64,7; 69,6; 67,8; 66,1; 65,6; 71,6; 73,2; 75,9; 78,1; 86,7; 81,8. Составить интервальное статистическое распределение выборки с числом частичных интервалов, равным 5, выбрав 40 в качестве нижней границы крайнего левого интервала и 90 в каче-

стве верхней границы крайнего правого интервала, и построить гистограмму частот статистического распределения.

19.1.3. В результате измерений некоторой химической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 12, 13, 14, 19, 22. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию измерений.

19.1.4. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	0	1	2	5
n_i	12	3	4	2

Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

19.1.5. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,9$ неизвестной генеральной средней a в случае нормального распределения генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$, выборочная средняя $\bar{x} = 10$ и объем выборки $n = 25$.

19.1.6. Результаты измерения трещиноватости пород пласта, содержащего нефть, среди случайно отобранных 100 образцов пород приведены в таблице:

%	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34	34–38	38–42
n_i	2	10	22	30	26	8	2

Построить гистограмму частот статистического распределения признака. Найти доверительные интервалы для оценки генерального среднего значения и генерального среднего квадратического отклонения трещиноватости пород, содержащих нефть, при условии нормального распределения этого признака, если надежность $\gamma = 0,95$.

Задачи для домашнего задания

19.1.7. В учебной группе — 25 студентов. Ниже приведены оценки, полученные этими студентами на экзамене по математике: 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 4, 3, 3, 3, 3. Составить статистическое распределение выборки, найти моду вариационного ряда и построить полигон частот статистического распределения.

19.1.8. Получена выборка результатов измерения роста студентов-юношей, обучающихся на втором курсе одной из специальностей (см): 179; 167; 181; 183; 166; 177; 173; 174; 178; 164; 172; 169; 177; 173; 176; 172; 174; 174; 162; 176; 176; 173; 179; 181; 166; 182; 161; 167; 174; 171. Составить интервальное статистическое распределение выборки с числом частичных интервалов, равным 5, выбрав 160 в качестве нижней границы крайнего левого интервала и 185 в качестве верхней границы крайнего правого интервала, и построить гистограмму частот статистического распределения.

19.1.9. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 11, 12, 15, 20, 22, 18, 17, 21. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию измерений.

19.1.10. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	0	2	3	5
n_i	5	15	4	2

Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

19.1.11. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестной генеральной средней a в случае нормального распределения генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочная средняя $\bar{x} = 5$ и объем выборки $n = 36$.

19.1.12. Результаты измерения количества CO_2 (%) в нефтеносном пласте среди случайно отобранных 100 образцов проб нефти приведены в таблице:

%	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
n_i	2	10	22	30	18	14	4

Построить гистограмму частот статистического распределения признака. Найти доверительные интервалы для оценки генерального среднего значения и генерального среднего квадратического отклонения трещиноватости пород, содержащих нефть, при условии нормального распределения этого признака, если надежность $\gamma = 0,95$.

Ответы

19.1.1.

x_i	0	1	2	5
n_i	8	3	4	1

 0.

19.1.2.

$x_i < X \leq x_{i+1}$	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
n_i	1	6	12	4	2

19.1.3. 16; 14,8.

19.1.4. 1; 2,4.

19.1.5. $9,342 < a < 10,658$.

19.1.6. $\bar{x}_s = 28$; $s = 5,0212$; $27 < a < 29$; $4,30 < \sigma < 5,74$.

19.1.7.

x_i	2	3	4	5
n_i	9	12	3	1

 3.

19.1.8.

$x_i < X \leq x_{i+1}$	160–165	165–170	170–175	175–180	180–185
n_i	3	5	10	8	4

19.1.9. 17; 14,5.

19.1.10. 2; 1,68.

19.1.11. $3,71 < a < 6,29$.

19.1.12. $\bar{x}_s = 56$; $s = 13,817$; $53,26 < a < 58,74$; $11,84 < \sigma < 15,79$.

19.2. Проверка статистических гипотез

1°. *Статистической* называется гипотеза о виде неизвестного закона распределения генеральной совокупности или о числовых значениях параметров известного закона распределения. *Основной (нулевой)* называется выдвинутая гипотеза H_0 , а гипотеза H_1 , противоречащая ей, называется *конкурирующей (альтернативной)*.

2°. Проверка справедливости гипотезы H_0 производится по данным выборки. При этом могут возникать ошибки первого и второго рода. Ошибка *первого рода* состоит в том, что отвергается

гипотеза H_0 , а на самом деле она справедлива. Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* и обозначается α , т. е. $\alpha = P_{H_0}(H_1)$. Ошибка *второго рода* состоит в том, что признается справедливой гипотеза H_0 , а на самом деле она неверна. Вероятность ошибки второго рода обозначается β , т. е. $\beta = P_{H_1}(H_0)$. Соответственно, вероятность принять справедливую гипотезу $P_{H_0}(H_0) = 1 - \alpha$, а вероятность отвергнуть неверную гипотезу равна $P_{H_1}(H_1) = 1 - \beta$.

3⁰. Для проверки статистических гипотез используется *статистический критерий* — случайная величина K , подчиненная некоторому известному, затабулированному закону распределения. Мы ограничимся рассмотрением статистического критерия Пирсона — критерия χ^2 (хи-квадрат). Значение критерия Пирсона, которое вычисляется по выборке, называется *наблюдаемым* (эмпирическим) и обозначается $\chi^2_{\text{набл}}$. В зависимости от принятого уровня значимости α и числа степеней свободы k множество значений критерия Пирсона делится на две области. *Критической областью* называется совокупность значений критерия, при которых основную гипотезу H_0 отвергают, а *областью принятия гипотезы* называется совокупность значений критерия, при которых основную гипотезу H_0 принимают. *Критическими точками* (границами) критерия Пирсона называются точки $\chi^2_{\text{кр}}$, которые отделяют критическую область от области принятия гипотезы. Критерий χ^2 имеет *правостороннюю* критическую область, которая задается интервалом $(\chi^2_{\text{кр}}, +\infty)$, где $\chi^2_{\text{кр}}$ определяется из условия $P(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}) = \alpha$. Основным принципом применения критерия Пирсона: если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ принадлежит критической области, то основную гипотезу H_0 отвергают и принимают конкурирующую гипотезу H_1 ; если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}$ принадлежит области принятия гипотезы, то основная гипотеза H_0 принимается, а конкурирующая гипотеза H_1 отвергается.

Наблюдаемое значение критерия Пирсона вычисляется по формуле:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

где n_i — наблюдаемые (эмпирические) частоты статистического распределения выборки; n'_i — теоретические (выравнивающие) частоты, вычисленные исходя из основной гипотезы; m — число различных вариантов в статистическом распределении выборки.

Значение $\chi^2_{кр}$ выбирается в таблице приложения 5 по принятому уровню значимости α и числу степеней свободы $k = m - r - 1$, где r — число параметров оцениваемого распределения, т. е. $\chi^2_{кр} = \chi^2_{кр}(\alpha; k)$.

4⁰. Алгоритм проверки по критерию Пирсона основной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности на основании статистического распределения выборки, которое представлено в виде последовательности равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот:

1) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}_s$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_s ;

2) найти теоретические частоты n'_i по формуле $n'_i = \frac{nh}{\sigma_s} \varphi(u_i)$,

где n — объем выборки, h — шаг, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$;

3) вычислить наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

4) сравнить значение $\chi^2_{набл.}$ со значением $\chi^2_{кр}$, выбранным в таблице приложения 5 при заданном уровне значимости α и вычисленному числу степеней свободы $k = m - 3$, и принять или отвергнуть основную гипотезу.

Задачи для решения на практическом занятии

19.2.1. Основная гипотеза — $H_0: a = 8$. Какие из перечисленных гипотез могут быть конкурирующими ей:

1) $H_1: a \leq 8$;

2) $H_1: a > 8$;

3) $H_1: a \neq 8$;

4) $H_1 : a < 9$;

5) $H_1 : a > 5$.

19.2.2. При проверке основной гипотезы вычислено значение критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{набл}} = 25$. Сделать вывод о принятии или непринятии основной гипотезы по числу степеней свободы k и уровню значимости α :

1) $k = 10, \alpha = 0,01$;

2) $k = 16, \alpha = 0,05$;

3) $k = 13, \alpha = 0,025$.

19.2.3. Нефтяники пробурили 5 скважин и предположили, что ежегодная добыча нефти на каждой скважине будет одинаковой. Фактический объем добычи составил (тыс. т): 104, 118, 83, 113, 82. Оценить, значимы или нет различия между фактическими и предполагаемыми объемами добычи при уровне значимости:

1) $\alpha = 0,01$;

2) $\alpha = 0,05$.

19.2.4. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	2	4	6	8
n_i	6	15	12	7

Найти теоретические частоты n'_i статистического распределения выборки исходя из предположения, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

19.2.5. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0,05$, если наблюдаемые и теоретические частоты выборки приведены в таблице:

n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	18
n'_i	9	17	25	32	34	30	22	14	7

Задачи для домашнего задания

19.2.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	3	5	7	9
n_i	4	10	20	9	7

Найти теоретические частоты n'_i статистического распределения выборки исходя из предположения, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

19.2.7. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0,025$, если наблюдаемые и теоретические частоты выборки приведены в таблице:

n_i	7	9	16	35	10	18	5
n'_i	5	12	17	40	9	11	6

19.2.8. Проверить по критерию Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0,01$ на основании статистического распределения выборки, которое представлено в виде последовательности равноотстоящих вариантов и соответствующих им частот:

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n_i	12	22	28	32	34	30	22	12	8

Ответы

19.2.1. $H_1 : a > 8$; $H_1 : a \neq 8$.

19.2.2. 1) $\chi^2_{кр} = 23,2$; основная гипотеза не принимается;

2) $\chi^2_{кр} = 26,3$; основная гипотеза принимается;

3) $\chi^2_{кр} = 24,7$; основная гипотеза не принимается.

19.2.3. $\chi^2_{набл} = 11,22$; 1) $\chi^2_{кр}(0,01;4) = 13,3$; различия не значимы;

2) $\chi^2_{кр}(0,05;4) = 9,5$; различия значимы.

19.2.4. $\bar{x}_s = 5$; $\sigma_s = 1,9$; n'_i : 4,82, 14,60, 14,60, 4,82.

19.2.5. $\chi^2_{набл} = 33,5$; $\chi^2_{кр}(0,05;6) = 12,6$; гипотеза о нормальном распределении отвергается.

19.2.6. $\bar{x}_s = 5,2$; $\sigma_s = \sqrt{5}$; 3,05, 11,04, 17,77, 12,90, 4,20.

19.2.7. $\chi^2_{набл} = 6,97$; $\chi^2_{кр}(0,025;4) = 11,1$; гипотеза о нормальном распределении не отвергается.

19. Элементы математической статистики

19.2.8. $n = 200$; $\bar{x}_s = 11,4$; $\sigma_s = 4,17$; u_i : $-1,77, -1,29, -0,82, -0,34, 0,14, 0,62, 1,10, 1,58, 2,06$; n'_i : $7,99, 16,65, 27,34, 36,12, 37,90, 31,58, 20,90, 10,98, 4,59$; $\chi^2_{\text{наб.}}$ = $7,38$; $\chi^2_{\text{кр}}(0,01;6) = 16,8$; гипотеза о нормальном распределении не отвергается.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,34	0,1331	0,68	0,2517	1,02	0,3461
0,01	0,0040	0,35	0,1368	0,69	0,2549	1,03	0,3485
0,02	0,0080	0,36	0,1406	0,70	0,2580	1,04	0,3508
0,03	0,0120	0,37	0,1443	0,71	0,2611	1,05	0,3531
0,04	0,0160	0,38	0,1480	0,72	0,2642	1,06	0,3554
0,05	0,0199	0,39	0,1517	0,73	0,2673	1,07	0,3577
0,06	0,0239	0,40	0,1554	0,74	0,2703	1,08	0,3599
0,07	0,0279	0,41	0,1591	0,75	0,2734	1,09	0,3621
0,08	0,0319	0,42	0,1628	0,76	0,2764	1,10	0,3643
0,09	0,0359	0,43	0,1664	0,77	0,2794	1,11	0,3665
0,10	0,0398	0,44	0,1700	0,78	0,2823	1,12	0,3686
0,11	0,0438	0,45	0,1736	0,79	0,2852	1,13	0,3708
0,12	0,0478	0,46	0,1772	0,80	0,2881	1,14	0,3729
0,13	0,0517	0,47	0,1808	0,81	0,2910	1,15	0,3749
0,14	0,0557	0,48	0,1844	0,82	0,2939	1,16	0,3770
0,15	0,0596	0,49	0,1879	0,83	0,2967	1,17	0,3790
0,16	0,0636	0,50	0,1915	0,84	0,2995	1,18	0,3810
0,17	0,0675	0,51	0,1950	0,85	0,3023	1,19	0,3830
0,18	0,0714	0,52	0,1985	0,86	0,3051	1,20	0,3849
0,19	0,0753	0,53	0,2019	0,87	0,3078	1,21	0,3869
0,20	0,0793	0,54	0,2054	0,88	0,3106	1,22	0,3883
0,21	0,0832	0,55	0,2088	0,89	0,3133	1,23	0,3907
0,22	0,0871	0,56	0,2123	0,90	0,3159	1,24	0,3925
0,23	0,0910	0,57	0,2157	0,91	0,3186	1,25	0,3944
0,24	0,0948	0,58	0,2190	0,92	0,3212	1,26	0,3962
0,25	0,0987	0,59	0,2224	0,93	0,3238	1,27	0,3980
0,26	0,1026	0,60	0,2257	0,94	0,3264	1,28	0,3997
0,27	0,1064	0,61	0,2291	0,95	0,3289	1,29	0,4015
0,28	0,1103	0,62	0,2324	0,96	0,3315	1,30	0,4032
0,29	0,1141	0,63	0,2357	0,97	0,3340	1,31	0,4049
0,30	0,1179	0,64	0,2389	0,98	0,3365	1,32	0,4066
0,31	0,1217	0,65	0,2422	0,99	0,3389	1,33	0,4082
0,32	0,1255	0,66	0,2454	1,00	0,3413	1,34	0,4099
0,33	0,1293	0,67	0,2486	1,01	0,3438	1,35	0,4115

Приложения

Окончание прил. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,36	0,4131	1,68	0,4535	2,00	0,4772	2,64	0,4959
1,37	0,4147	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,38	0,4162	1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
1,39	0,4177	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,70	0,4965
1,40	0,4192	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
1,41	0,4207	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,74	0,4969
1,42	0,4222	1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971
1,43	0,4236	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
1,44	0,4251	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,80	0,4974
1,45	0,4265	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
1,46	0,4279	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,84	0,4977
1,47	0,4292	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
1,48	0,4306	1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,4980
1,49	0,4319	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,90	0,4981
1,50	0,4332	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,51	0,4345	1,83	0,4664	2,30	0,4893	2,94	0,4984
1,52	0,4357	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,53	0,4370	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,54	0,4382	1,86	0,4686	2,36	0,4909		
1,55	0,4394	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,00	0,49865
1,56	0,4406	1,88	0,4699	2,40	0,4918	3,20	0,49931
1,57	0,4418	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,40	0,49966
1,58	0,4429	1,90	0,4713	2,44	0,4927	3,60	0,499841
1,59	0,4441	1,91	0,4719	2,46	0,4931	3,80	0,499928
1,60	0,4452	1,92	0,4726	2,48	0,4934		
1,61	0,4463	1,93	0,4732	2,50	0,4938	4,00	0,499968
1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941	4,50	0,499997
1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945		
1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948	5,00	0,500000
1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951		
1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,60	0,4953		
1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956		

Таблица значений $t_\gamma = t_\gamma(\gamma, n)$

$\begin{matrix} \gamma \\ n \end{matrix}$	0,95	0,99	0,999	$\begin{matrix} \gamma \\ n \end{matrix}$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,129	0,162

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8

0,99

0,00016

0,020

0,115

0,297

0,554

0,872

1,24

1,65

2,09

2,56

3,05

3,57

4,11

4,66

5,23

5,81

6,41

7,01

7,63

8,26

8,90

9,54

10,2

10,9

11,5

12,2

12,9

13,6

14,3

15,0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА	5
1.1. Определители: основные понятия, вычисление, свойства. Миноры, алгебраические дополнения	5
1.2. Матрицы: определение, действия над ними, свойства. Обратная матрица	10
1.3. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Методы их решения (правило Крамера, метод Гаусса, матричный способ)	16
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	22
2.1. Векторы: основные понятия. Разложение вектора по базису	22
2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	25
3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	31
3.1. Прямая линия на плоскости	31
3.2. Плоскость и прямая в пространстве	37
3.3. Кривые второго порядка	43
3.4. Поверхности второго порядка	49
3.5. Линейные (векторные) пространства. Линейные преобразования	60
4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	67
4.1. Абсолютная величина. Понятие функции. Обратная, сложная и неявная функции	67

4.2. Предел функции. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Замечательные пределы. Вычисление пределов	74
4.3. Непрерывность и точки разрыва функции	83
5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	87
5.1. Определение производной функции. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции	87
5.2. Дифференцирование сложной функции. Дифференциал. Производные высших порядков (два практических занятия)	93
5.3. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Кривизна плоской линии	101
6. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	106
6.1. Простейшие свойства функций. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Правило Лопиталья	106
6.2. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции	111
6.3. Выпуклость графика функции. Точка перегиба. Асимптоты	116
6.4. Полное исследование функции и построение графика	119
6.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Текстовые задачи	120
7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	123
7.1. Простейшие свойства функций. Частные производные. Полный дифференциал	123

7.2. Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области. Производная по направлению и градиент	128
8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	132
8.1. Непосредственное интегрирование. Подведение под знак дифференциала	132
8.2. Подведение под знак дифференциала	141
8.3. Замена переменной. Интегрирование по частям. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен (два практических занятия)	147
8.4. Интегрирование рациональных дробей	154
8.5. Интегрирование тригонометрических функций	157
8.6. Интегрирование иррациональных функций	161
9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ	165
9.1. Вычисление определенного интеграла	165
9.2. Вычисление несобственного интеграла	168
9.3. Вычисление площади плоской фигуры	170
9.4. Вычисление длины плоской кривой. Вычисление объема тела	172
9.5. Статические моменты и моменты инерции. Масса пластины. Координаты центра тяжести	175
9.6. Вычисление пройденного пути, работы и давления	178
10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	181
10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка: определение, основные понятия и теоремы. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли. Приводящиеся к однородным (два практических занятия)	181
10.2. Дифференциальные уравнения второго порядка: определение, основные понятия и теоремы.	

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка	190
10.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (два практических занятия)	194
10.4. Текстовые задачи на составление дифференциальных уравнений	199
11. РЯДЫ	202
11.1. Числовые ряды: определение, основные понятия, теоремы. Знакоположительные ряды. Необходимый и достаточные признаки сходимости (два практических занятия)	202
11.2. Знакопередающие и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость	208
11.3. Степенные ряды. Интервал и область сходимости. Свойства степенных рядов	211
11.4. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям	214
12. РЯДЫ ФУРЬЕ	219
12.1. Разложение функций в ряд Фурье	219
12.2. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье по косинусам и синусам	222
13. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	227
13.1. Основные уравнения математической физики. Уравнение колебания струны	227
13.2. Уравнение теплопроводности	230
14. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	234
14.1. Вычисление двойного интеграла	234

14.2. Приложения двойного интеграла. Вычисление тройного интеграла	239
14.3. Криволинейный интеграл	242
15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	249
15.1. Комплексные числа. Арифметические операции над ними. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Извлечение корней из комплексных чисел	249
15.2. Функции комплексного переменного. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Отображения точек и линий с помощью аналитической функции	257
15.3. Интегрирование функции комплексного переменного	263
16. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ	270
16.1. Элементы теории множеств	270
16.2. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона. Элементы алгебры логики высказываний	275
16.3. Элементы теории графов	282
16.4. Ориентированные графы	289
17. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	294
17.1. Случайные события. Классическое определение вероятностей	294
17.2. Сумма и произведение событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного события. Формула полной вероятности. Формула Байеса	298
17.3. Независимые испытания. Формулы Бернулли и Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа	303

Практические занятия по математике: теория, задания, ответы

18. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	307
18.1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей. Числовые характеристики. Биномиальный закон распределения	307
18.2. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределения. Числовые характеристики	312
19. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	320
19.1. Генеральная и выборочная совокупности. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма. Точечные и интервальные оценки параметров распределения	320
19.2. Проверка статистических гипотез	326
ПРИЛОЖЕНИЯ	332